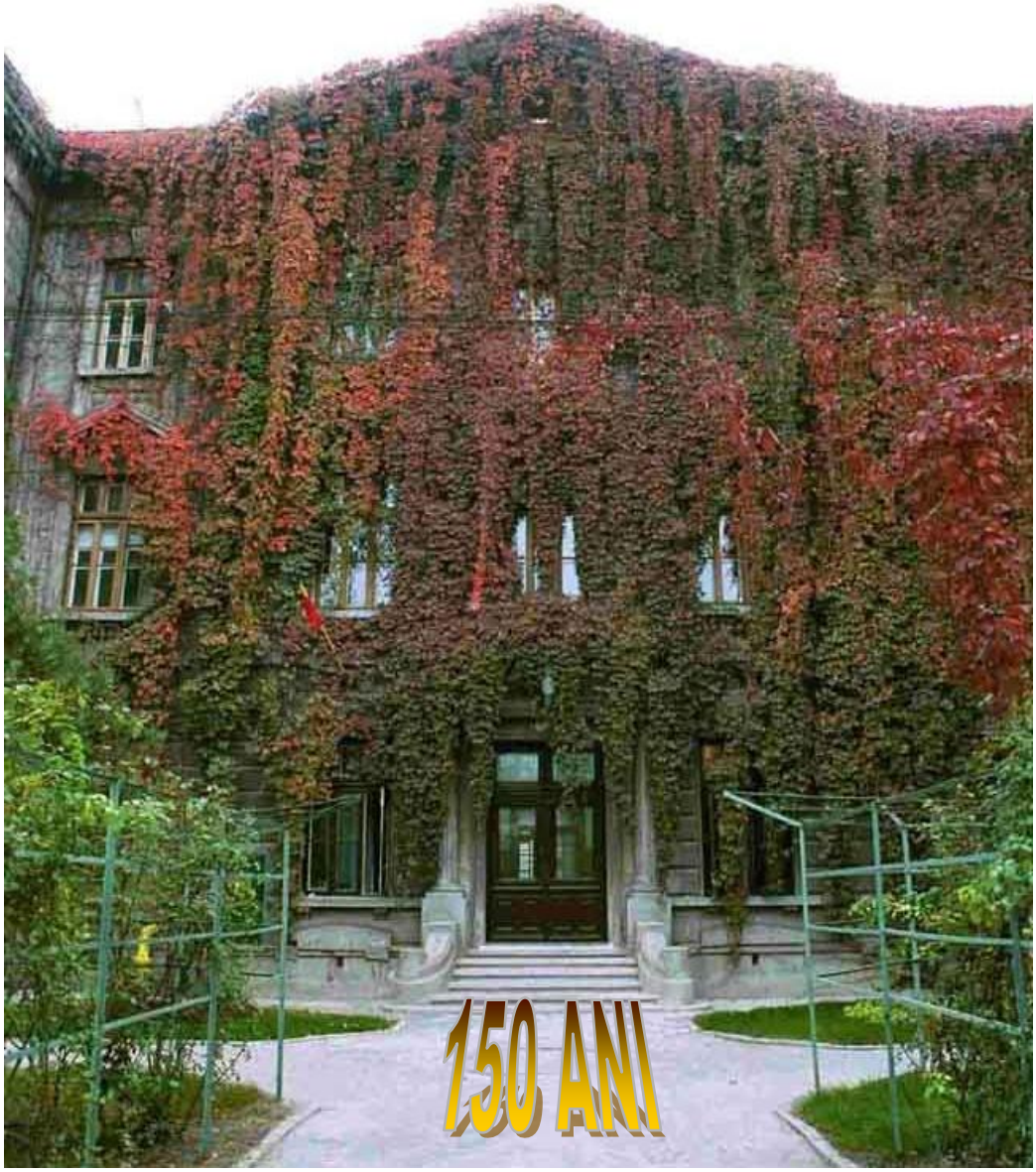
COLEGIUL NAȚIONAL „MATEI BASARAB” BUCUREŞTI



CALEIDOSCOP

MATEMATIC NR. 2

NOIEMBRIE 2010

REVISTA DE CULTURA SI INFORMATIE

C U P R I N S

ARTICOLE

Colegiul Național „Matei Basarab” din Bucureşti, 150 de ani de existență, *prof. Viorica Popa*……..……..……..... 1
Inegalitatea lui Bergström. Aplicații, *prof. D.M. Bătinețu – Giurgiu, prof. Ion Dina*…..… 4

EXAMENE ŞI CONCURSURI

Problemele date la Concursul de matematică „Miron Nicolescu”, ediția a XI-a, 18 ianuarie 2010……...……..... 11
Soluțiile problemelor date la Concursul de matematică „Miron Nicolescu”, ediția a XI-a,18 ianuarie 2010…..…….13

SESIUNI DE REFERATE ŞI COMUNICĂRI ŞTIINȚIFICE

Aplicații ale derivatelor în fizică, *elevele: Stan Ioana, Medeleț Raluca, prof. Emilia Iancu* .....…….. 23
Numărul de aur (proporția de aur, diviziunea de aur), *elevele: Călin Ioana Alexandra, Asultanei Laura, prof. Ion Dina*……..….....……27
Din istoria criptografiei, *elevii: Cristian Marian Deaconu, Mădălina-Georgiana Necula, prof. Viorel Chițimia* ….…….. 33
Aplicații practice ale studiului funcției de gradul al doilea, *elevii Băloiu Radu, Nadă George, prof. Daniela Minculeț*……..…… 40
Software educațional pentru matematică, *eleva Duță Valentina, prof. Adriana Stanciu*…43

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Anul 2010 nr.2

Comitetul de redacție

Ion Dina **Emilia Iancu**
Viorel Chițimia **Ovidiu Horobeț**
George Şerbănescu **Daniela Minculeț**

Redactor şef
Ion Dina

Responsabil de număr: **Viorel Chițimia**
Tehnoredactare computerizată: **Viorel Chițimia**

CALEIDOSCOP MATEMATIC se doreşte a fi o publicație semestrială pentru elevii care învață şi profesorii care predau în învățământul preuniversitar. Această revistă este editată de Catedra de matematică a Colegiului Național „Matei Basarab” din Bucureşti.

INEGALITATEA LUI BERGSTRÖM. APLICAȚII

de
D.M. Bătinețu – Giurgiu[1] şi **I. Dina**

Inegalitatea lui ***Bergström*** are următorul enunț:

Dacă $n \in \mathbf{N}^* - 1$, $x_k \in \mathbf{R}, y_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k = \overline{1,n}, X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{X_n^2}{Y_n}, \qquad \textbf{(B)},$$

cu egalitate, dacă şi numai dacă, există $t \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $x_k = t \cdot y_k, \forall k = \overline{1,n}$.

Inegalitatea ***Cauchy-Buniakowski-Schwarz*** are următorul enunț:

Dacă $n \in \mathbf{N}^* - 1$, $x_k, y_k \in \mathbf{R}, \forall k = \overline{1,n}$, atunci:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2, \qquad \textbf{(C-B-S)},$$

cu egalitate, dacă şi numai dacă, există $t \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $x_k = t \cdot y_k, \forall k = \overline{1,n}$.

Ne propunem să dăm inegalității (**B**) mai multe demonstrații şi să evidențiem că inegalitatea (**B**) nu este un caz particular al inegalității (**C-B-S**), ci este o inegalitate distinctă, dar echivalentă, cu inegalitatea (**C-B-S**). Datorită acestei echivalențe noi considerăm că este imoral şi chiar fraudulos să se folosească una din exprimările:

i) inegalitatea (**B**) este forma lui **„*Păcală*”** a inegalității (**C-B-S**),

ii) inegalitatea (**C-B-S**) este forma lui **„*Tândală*”** a inegalității (**B**),

Înainte de a prezenta cele patru demonstrații ale inegalității (**B**) vom arăta că este suficient să demonstrăm inegalitatea (**B**) numai pentru $x_k, y_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k = \overline{1,n}$. Acelaşi lucru se poate arăta şi pentru a demonstra inegalitatea (**C-B-S**). Prin urmare acceptăm că inegalitatea (**B**) este demonstrată pentru $x_k, y_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k = \overline{1,n}$ şi observăm că dacă $x_k = 0, \forall k = \overline{1,n}$, atunci inegalitatea (**B**) se verifică prin egalitatea 0 = 0.

Dacă $x_k \in \mathbf{R}, \forall k = \overline{1,n}$, atunci avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2}{Y_n} \geq \frac{\left(\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right)^2}{Y_n} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{Y_n} = \frac{X_n^2}{Y_n},$$

adică inegalitatea (**B**) este demonstrată şi în acest caz.

Dacă m $(n \in \mathbf{N}^*, m < n)$ dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nenule iar restul sunt nule, putem presupune (fără a restrânge generalitatea) că $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbf{R}_+^*$, iar $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$. În acest caz avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{m} y_k} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{m} y_k} \geq \frac{X_n^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} = \frac{X_n^2}{Y_n}$$

şi deci inegalitatea (**B**) este demonstrată şi în acest caz.

[1] Preşedintele Asociației Cultural Ştiințifice **„MATEI BASARAB”** din Bucureşti

Prin urmare, în cele patru demonstrații ale inegalității (**B**), pe care le vom prezenta, vom considera $x_k, y_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k = \overline{1,n}$.

Demonstrația 1. Este evident că:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\cdot t-\sqrt{y_k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\right)\cdot t^2-2\cdot X_n\cdot t+Y_n\geq 0, \forall t\in\mathbf{R}, \qquad (1).$$

şi atunci discriminantul acestui trinom de gradul al doilea în $t \in \mathbf{R}$ este:

$\Delta' = X_n^2 - Y_n \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k} \leq 0 \iff \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{X_n^2}{Y_n}$, ceea ce demonstrează inegalitatea (**B**). Avem egalitate în (1) dacă şi numai dacă există $t \in \mathbf{R}^*$ astfel încât

$$\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\cdot t-\sqrt{y_k}=0, \forall k=\overline{1,n} \iff t\cdot x_k=y_k, \forall k=\overline{1n} \iff x_k=\frac{1}{t}\cdot y_k, \forall k=\overline{1,n}.$$

Demonstrația 2. Pornim de la inegalitatea evidentă:

$$(1+x)^2\geq 1+2x, \forall x\in\mathbf{R}, \qquad (2).$$

Deoarece $x_k, y_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k = \overline{1,n}$ rezultă că $X_n, Y_n \in \mathbf{R}_+^*$, iar inegalitatea (**B**) se mai scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^2\cdot\frac{Y_n}{y_k}\geq 1, \qquad (3).$$

Deoarece

$$\frac{Y_n}{y_k}\cdot\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^2=\frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(\frac{x_k}{X_n}\cdot\frac{Y_n}{y_k}\right)^2=\frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(1+\frac{x_k\cdot Y_n-y_k\cdot X_n}{y_k\cdot X_n}\right)^2, \forall k=\overline{1,n}$$

conform inegalității (3) rezultă că:

$$\frac{Y_n}{y_k}\cdot\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^2\geq\frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(1+2\cdot\frac{x_k\cdot Y_n-y_k\cdot X_n}{y_k\cdot X_n}\right)=\frac{y_k}{Y_n}+2\cdot\frac{x_k}{X_n}-2\cdot\frac{y_k}{Y_n}=2\cdot\frac{x_k}{X_n}-\frac{y_k}{Y_n}, \forall k=\overline{1,n}, \qquad (4).$$

Adunând membru cu membru, inegalitățile (4) după $k=\overline{1,n}$, deducem că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_n}{y_k}\cdot\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^2\geq 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X_n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{Y_n}=\frac{2}{X_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k-\frac{1}{Y_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k=\frac{2}{X_n}\cdot X_n-\frac{1}{Y_n}\cdot Y_n=1$$

ceea ce demonstrează inegalitatea (3) şi deci, inegalitatea (**B**).

Demonstrația 3. Prin inducție. Pentru $n = 2$ avem de demonstrat că:

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}\geq\frac{(x_1+x_2)^2}{y_1+y_2}=\frac{X_2^2}{Y_2}, \qquad (5).$$

Întradevăr, inegalitatea (5) este echivalentă cu:

$$(y_1+y_2)\cdot\left(\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}\right)\geq(x_1+x_2)^2, \qquad (6).$$

Avem:

$$y_1+y_2\cdot\left(\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}\right)=x_1^2+\frac{y_1}{y_2}x_2^2+\frac{y_2}{y_1}\cdot x_1^2+x_2^2\geq x_1^2+x_2^2+2\cdot\sqrt{\frac{y_1}{y_1}x_2^2\cdot\frac{y_2}{y_1}\cdot x_1^2}=$$

$$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2,$$

adică inegalitatea (6) este adevărată şi deci şi inegalitatea echivalentă (5) este adevărată.

Presupunem că inegalitatea (**B**) este adevărată pentru $n=p\in\mathbf{N}^*-1$ şi să demonstrăm că ea este adevărată şi pentru $n=p+1$.

Întradevăr,

$$\sum_{k=1}^{p+1}\frac{x_k^2}{y_k}=\sum_{k=1}^{p}\frac{x_k^2}{y_k}+\frac{x_{p+1}^2}{y_{p+1}}\geq\frac{X_p^2}{Y_p^2}+\frac{x_{p+1}^2}{y_{p+1}}$$

şi conform cu inegalitatea (5) rezultă că:

$$\sum_{k=1}^{p+1}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{X_p^2}{Y_p^2}+\frac{x_{p+1}^2}{y_{p+1}}\geq\frac{(X_p+x_{p+1})^2}{Y_p+y_{p+1}}=\frac{X_{p+1}^2}{Y_{p+1}}.$$

Prin urmare, inegalitatea (**B**) este adevărată şi pentru $n=p+1$.

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că inegalitatea (**B**) este adevărată oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$.

Demonstraţia 4. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}=\sum_{k=1}^{n}y_k\cdot\left(\frac{x_k}{y_k}\right)^2=Y_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(\frac{x_k}{y_k}\right)^2, \qquad (7).$$

Deoarece funcţia $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}_+^*,\ f(t)=t^2$ este convexă pe $\mathbf{R}_+^*$ şi $\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{Y_n}=1$ rezultă, conform inegalităţii lui Jensen că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(\frac{x_k}{y_k}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{Y_n}\cdot f\left(\frac{x_k}{y_k}\right)\geq f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{Y_n}\cdot\frac{x_k}{y_k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{Y_n}\right)^2=\frac{1}{Y_n^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2=\frac{X_n^2}{Y_n^2}, \qquad (8).$$

Din inegalităţile (7) şi (8) deducem că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq Y_n\cdot\frac{X_n^2}{Y_n^2}=\frac{X_n^2}{Y_n},$$

adică inegalitatea (**B**) este demonstrată.

Să demonstrăm acum că (**B**) $\Leftrightarrow$ (**C-B-S**). Întradevăr, (**B**) $\Rightarrow$ (**C-B-S**). Dacă în inegalitatea (**B**) înlocuim x_k cu $x_k\cdot y_k$ şi y_k cu y_k^2, $\forall k=\overline{1,n}$ obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2\cdot y_k^2}{y_k^2}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot y_k\right)^2,$$

adică am obţinut inegalitatea (**C-B-S**).

(**C-B-S**) $\Rightarrow$ (**B**). Dacă în inegalitatea (**C-B-S**) înlocuim x_k cu $\sqrt{y_k}$ şi y_k cu $\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$, $\forall k=\overline{1,n}$ deducem că:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{y_k}\cdot\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{X_n^2}{Y_n},$$

adică inegalitatea (**B**).

A p l i c a ț i i

A$_1$. Dacă $n \in \mathbf{N}^* - 1$ şi $a, b, x_k \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $a.X_n \geq b.x_k$, $\forall k = \overline{1,n}$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a.X_n - bx_k} \geq \frac{n}{an-b}, \qquad (9).$$

Demonstrația 1. Avem:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a.X_n - bx_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a.X_n.x_k - b.x_k^2},$$

de unde, conform inegalității (**B**) deducem că:

$$s_n \geq \frac{X_n^2}{a.\sum_{k=1}^{n} X_n.x_k - b.\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \frac{X_n^2}{a.X_n^2 - b.\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \qquad (10).$$

Deoarece media aritmetică a numerelor $x_k, \forall k = \overline{1,n}$ este mai mică decât media pătratică a aceloraşi numere rezultă că:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \frac{X_n^2}{n} \Leftrightarrow -b.\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq -b.\frac{X_n^2}{n} \Leftrightarrow a.X_n^2 - b.\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq a.X_n^2 - \frac{b}{n}.X_n^2 =$$

$$= \frac{an-b}{n}.X_n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a.X_n^2 - b.\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \geq \frac{n}{(an-b)X_n^2} \qquad (11).$$

Din relațiile (10) şi (11) rezultă inegalitatea (9).

Demonstrația 2. Avem:

$$s_n + \frac{n}{b} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{a.X_n - b.x_k} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b}.X_n.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a.X_n - b.x_k},$$

unde aplicăm inegalitatea (**B**) şi deducem că:

$$s_n + \frac{n}{b} \geq \frac{a}{b}.X_n.\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} aX_n - bx_n} = \frac{a}{b}.X_n.\frac{n^2}{an.X_n - b.X_n} = \frac{an^2}{b\ an-b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_n \geq \frac{an^2}{b\ an-b} - \frac{n}{b} = \frac{an^2 - an^2 + bn}{b\ an-b} = \frac{n}{an-b},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 1. Pentru $n = 3$, $a = b = 1$ din inegalitatea (9) obținem:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}, \qquad (12)$$

adică inegalitatea lui ***Nesbitt***.

A$_2$. Dacă $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ şi $a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 = s$, atunci:

$$\frac{x}{a_1 y + b_1 z} + \frac{y}{a_2 z + b_2 x} + \frac{z}{a_3 x + b_3 y} \geq \frac{3}{s}, \qquad (13).$$

Demonstrație. Fie

$$A=\sum\frac{x}{a_1y+b_1z}=\sum\frac{x^2}{a_1xy+b_1xz},$$

unde aplicăm inegalitatea (**B**) şi deducem că:

$$A\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a_1+b_2)xy+(a_2+b_3)yz+(a_3+b_1)zx}=\frac{(x+y+z)^2}{s\cdot(xy+yz+zx)},\qquad(14).$$

Deoarece: $(x+y+z)^2\geq3(xy+yz+zx)$, din inegalitatea (14) obținem inegalitatea (13) şi demonstrația se încheie.

Observația 2. Dacă $a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3=1$, atunci s = 2 şi din (13) obținem inegalitatea (12).

A3. Dacă $a,b,x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$ şi $x\cdot y\cdot z=1$, atunci:

$$\frac{1}{x^3(ay+bz)}+\frac{1}{y^3(az+bx)}+\frac{1}{z^3(ax+by)}\geq\frac{3}{a+b},\qquad(15).$$

Demonstrație. Avem:

$$B=\sum\frac{1}{x^3(ay+bz)}=\sum\frac{\frac{1}{x^2}}{axy+bxz},$$

unde aplicăm inegalitatea (**B**) şi deducem:

$$B\geq\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{(a+b)\cdot(xy+yz+zx)}=\frac{(xy+yz+zx)^2}{(xyz)^2(xy+yz+zx)(a+b)}=\frac{xy+yz+zx}{a+b},\qquad(16).$$

Conform inegalității mediilor avem:

$xy+yz+zx\geq3\cdot\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$ şi atunci inegalitatea (16) devine: $B\geq\frac{3}{a+b}$, adică am demonstrat inegalitatea (15).

Observația 3. Dacă $a=b=1$, din inegalitatea (15) se obține o problemă propusă de Rusia la a XXXVI-a O.I.M., Canada, 1995.

Ne propunem să demonstrăm inegalitatea:

Dacă $n\in\mathbf{N}^*-\{1\}$, $x_k,y_k,z_k\in\mathbf{R}_+^*,\forall k=\overline{1,n}$, atunci:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot y_k\cdot z_k\right)^3\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}z_k^3\right),\qquad(17).$$

Mai întâi demonstrăm:

Teorema 1. Dacă $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$, $x_k,y_k\in\mathbf{R}_+^*,\forall k=\overline{1,n}$, atunci:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^3}{y_k^2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^3,\qquad(18).$$

Demonstrație. Inegalitatea (18) se mai scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^3}{y_k^2}\geq\frac{X_n^3}{Y_n^2},\qquad(19)$$

de unde se constată o asemănare cu inegalitatea (**B**).

Să demonstrăm acum:

Lema 1. Dacă $t \in (-1, \infty)$, atunci:

$$(1+t)^3 \geq 1+3t, \qquad (20).$$

Întradevăr,

$$1+t>0 \;\Rightarrow\; (1+t)^3 = 1+2t+t^2 \geq 1+2t, \qquad (21).$$

Rezultă atunci că:

$$(1+t)^3 = (1+t)^3 \cdot (1+t) \geq (1+2t)\cdot(1+t) = 1+3t+2t^2 \geq 1+3t, \qquad (22)$$

ceea ce demonstrează lema.

Relația (20) se mai poate demonstra şi astfel:

$$(1+t)^3 = 1+3t+3t^2+t^3 = 1+3t+t^2(3+t) = 1+3t+t^2(1+t+2) \geq 1+3t+t^2 \geq 1+3t.$$

Relația (19) este echivalentă cu inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^3 \cdot \left(\frac{Y_n}{y_k}\right)^2 \geq 1 \qquad (23).$$

Avem:

$$\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^3 \cdot \left(\frac{Y_n}{y_k}\right)^2 = \frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(\frac{x_k \cdot Y_n}{y_k \cdot X_n}\right)^3, \quad \forall k=\overline{1,n}, \qquad (24).$$

Conform inegalității (20) rezultă:

$$\left(\frac{x_k \cdot Y_n}{y_k \cdot X_n}\right)^3 = \left(1+\frac{x_k \cdot Y_n - y_k \cdot X_n}{y_k \cdot X_n}\right)^3 \geq 1+3\cdot\frac{x_k \cdot Y_n - y_k \cdot X_n}{y_k \cdot X_n}, \quad \forall k=\overline{1,n}, \qquad (25).$$

Prin urmare,

$$\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^3 \cdot \left(\frac{Y_n}{y_k}\right)^2 = \frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(\frac{x_k \cdot Y_n}{y_k \cdot X_n}\right)^3 \geq \frac{y_k}{Y_n}\cdot\left(1+3\cdot\frac{x_k \cdot Y_n - y_k \cdot X_n}{y_k \cdot X_n}\right) =$$

$$= \frac{y_k}{Y_n} + 3\cdot\left(\frac{x_k}{X_n} - \frac{y_k}{Y_n}\right) = 3\cdot\frac{x_k}{X_n} - 2\cdot\frac{y_k}{Y_n}, \quad \forall k=\overline{1,n}, \qquad (26).$$

Prin însumarea relațiilor (26), membru cu membru, după $k=\overline{1,n}$, deducem că:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{X_n}\right)^3 \cdot \left(\frac{Y_n}{y_k}\right)^2 \geq \frac{3}{X_n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{2}{Y_n}\cdot\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{3}{X_n}\cdot X_n - \frac{2}{Y_n}\cdot Y_n = 1$$

ceea ce demonstrează inegalitatea (23) şi deci ne demonstrează şi inegalitatea echivalentă (18), adică demonstrază teorema.

Dacă în inegalitatea (18) înlocuim x_k cu $x_k \cdot y_k^2$ şi y_k cu $y_k^3, \forall k=\overline{1,n}$ deducem că:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^3\right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k^2\right)^3, \qquad (27).$$

Fie $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}, x_k, y_k, z_k \in \mathbf{R}_+^*, \forall k=\overline{1,n}$ şi să înlocuim în relația (27) pe y_k^2 cu $y_k \cdot z_k$, $\forall k=\overline{1,n}$, atunci deducem că:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot z_k \cdot \sqrt{y_k \cdot z_k}\right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \cdot z_k\right)^3, \qquad (28).$$

Dacă înlocuim în inegalitatea (**C-B-S**) pe x_k cu $y_k \cdot \sqrt{y_k}$ şi pe y_k cu $z_k \cdot \sqrt{z_k}$, $\forall k=\overline{1,n}$ rezultă că:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^3\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot z_k \cdot \sqrt{y_k z_k}\right)^2, \qquad (29).$$

Din relațiile (28) şi (29) rezultă că:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^3\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\cdot z_k\cdot\sqrt{y_k z_k}\right)^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_k\cdot z_k\right)^3$$

ceea ce demonstrează inegalitatea (17).

Pe baza inegalității (20) putem demonstra în mod analog inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^3}{y_k}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_k\right)^3, \qquad (30).$$

Întradevăr, notând $U_n=\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_k,\quad V_n=\sum_{k=1}^{n} y_k^2$, inegalitatea (30) este echivalentă cu:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^3}{y_k}\right)\cdot\frac{V_n^2}{U_n^3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{U_n}\right)^3\cdot\frac{V_n^2}{y_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{V_n}\cdot\left(\frac{x_k\cdot V_n}{y_k\cdot U_n}\right)^3\geq 1, \qquad (31).$$

Conform cu inegalitatea (20) avem:

$$\left(\frac{x_k\cdot V_n}{y_k\cdot U_n}\right)^3\geq 1+3\cdot\frac{x_k\cdot V_n-y_k\cdot U_n}{y_k\cdot U_n},\quad \forall k=\overline{1,n}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{y_K^2}{V_n}\cdot\left(\frac{x_k\cdot V_n}{y_k\cdot U_n}\right)^3\geq\frac{y_k^2}{V_n}+3\left(\frac{x_k\cdot y_k}{U_n}-\frac{y_k^2}{V_n}\right),\quad\forall k=\overline{1,n} \qquad (32).$$

Prin însumarea membru cu membru a relațiilor (32) după $k=\overline{1,n}$ obținem

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{y_K^2}{V_n}\cdot\left(\frac{x_k\cdot V_n}{y_k\cdot U_n}\right)^3\geq\frac{1}{V_n}\cdot\sum_{k=1}^{n} y_k^2+3\frac{1}{U_n}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_k-3\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2=\frac{1}{V_n}\cdot V_n+3\frac{1}{U_n}\cdot U_n-\frac{3}{V_n}\cdot V_n=1,$$

adică am demonstrat inegalitatea (30).

Dacă în inegalitatea (30) înlocuim pe x_k cu $x_k\cdot y_k$ şi pe y_k cu $y_k^3,\quad\forall k=\overline{1,n}$ deducem că:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^6\right)^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_k^4\right)^3, \qquad (33).$$

Fie $n\in\mathbf{N}^*\setminus 1$, $x_k, y_k, z_k\in\mathbf{R}_+^*, \forall k=\overline{1,n}$ şi să înlocuim în inegalitatea (33) pe y_k cu $\sqrt[4]{y_k z_k},\quad\forall k=\overline{1,n}$ în acest mod obținem inegalitatea:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\cdot\sqrt{y_k z_k}\right)^2\geq\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot y_k z_k\right)^3, \qquad (34).$$

adică am obținut inegalitatea (28) şi procedând ca mai sus deducem inegalitatea (17).

Bibliografie

[1] Bătinețu – Giurgiu M.D., *Aplicații la inegalitatea lui J.Radon,* **Gazeta Matematică** nr. 7-8-9/2010, 359-362

[2] Bellman R., *Note on matrix theory* – IV (*An inequality due to Bergström*), Amer. Mathematical Mounthly, 62(1955), 172-179

[3] Bergström H., *A triangle inequality for matrices,* Den Elfe Skandinaviske Matematike-kongress, 1949, Trondheim, Johan Gnendt Tanums Forlag, Oslo, 1952, 264-267

[4] Mitrinovic S.D., *Analytic inequalities,* Springer-Verlag Berlin, 1970

[5] Nesbitt M.A., *Problem* 15114, Educational Times, 3(1901), 37-38

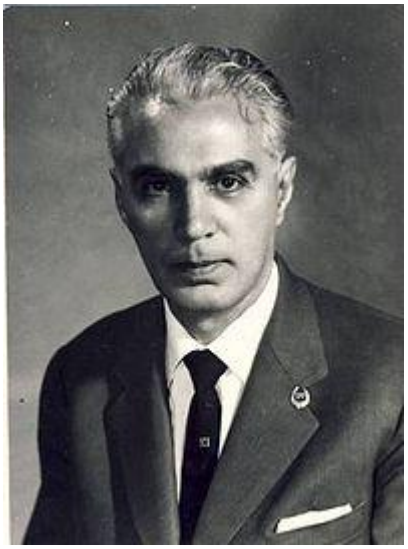
[6] Panaitopol Laurențiu, *Consecințe ale inegalității Hölder*, **G.M.** 4(2002), 145-147

[7] Pop T. Ovidiu, *About Bergström's inequality*, J. Math. Inequalities, 3(2009), nr. 2, 237-242

[8] Radon J., *Theorie und anwendungen der absolut additiven mengenfunktionen,* Sitzungsber, Akad. Wissen, Wien, 122(1913), 1295-1438.

Miron Nicolescu

(27 august 1903 – 30 iunie 1975)



Miron Nicolescu s-a născut la Giurgiu, a urmat şcoala primară şi apoi cursurile liceului **„Matei Basarab” din Bucureşti.**

După terminarea studiilor la Facultatea de Matematică a **Universităţii Bucureşti** în 1924, a plecat la **Paris,** unde s-a înscris la **École Normale Supérieure şi la Sorbona**. În 1928 şi-a luat doctoratul, cu teza *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace*, sub îndrumarea lui **Paul Montel.** După întoarcerea în România, a predat la **Universitatea din Cernăuţi** până în 1940, când a fost numit profesor la **Universitatea din Bucureşti**.

În 1936 a fost ales **membru corespondent al Academiei Române**, iar în 1953 membru titular. În 1963 a devenit director al **Institutului de Matematică al Academiei Române**. Din 1966 până la deces a fost preşedinte al Academiei Române.

La Congresul Internaţional al Matematicienilor de la **Vancouver** (Canada) în 1974 a fost ales vicepreşedinte al „International Mathematical Union”.

În memoria ilustrului matematician, fost elev al colegiului nostru, în ultimii ani s-a organizat concursul anual de matematică ce-i poartă numele, ajungându-se în 2010 la ediţia a XI-a.

În continuare, vom prezenta problemele şi soluţiile acestora, date la:

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRON NICOLESCU”

Ediţia a XI-a, 18 ianuarie 2010

Enunţuri

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\frac{x+7}{9}\right]=\frac{x-1}{2}$, unde $[\cdot]$ este partea întreagă a numărului real.

2. Să se demonstreze că dacă $a.b\geq 1$ atunci $a+b\leq a^2+b^2$.

3. Fie $a\in\mathbf{R}^*$ astfel încât: $a+\frac{1}{a}\in\mathbf{Z}$. Să se arate că: $a^4+\frac{1}{a^4}\in\mathbf{Z}$; găsiţi un număr iraţional *a* care verifică condiţiile date.

4. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n\geq 2$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

5. Se consideră ΔABC, $M\in(AB)$ şi $N\in(AC)$ astfel încât $[MB]\equiv[NC]$. Dacă *Q* este mijlocul segmentului $[MN]$, arătaţi că există un punct *E* pentru care $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{QE}$ şi *QE* este paralelă cu bisectoarea $\angle BAC$.

Clasa a X-a

1. Se consideră expresia $E(x,y)=\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\cdot\frac{(x^3y)^{\frac{1}{2}}}{x+y}+\frac{2y}{y-x}$. Să se calculeze: $E(\sqrt{2009},\sqrt[3]{2010})$.

2. Fie $a,b,c \in (0,\infty)-\{1\}$ numere în progresie geometrică, în această ordine. Să se demonstreze că pentru orice număr real $x \in (0,\infty)-\{1\}$ are loc egalitatea:

$$\frac{\log_a x}{\log_c x}=\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}.$$

3. **a)** Să se demonstreze inegalitățile:

(i) $x+\frac{1}{x}\geq 2,\quad \forall x\in(0,\infty)$; (ii) $\frac{2xy}{x+y}\leq\sqrt{xy},\quad \forall x,y\in(0,\infty)$;

b) Să se demonstreze că pentru $\forall a,b\in(0,1)$ are loc inegalitatea:

$$\log_a\frac{2ab}{a+b}+\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 2.$$

4. Să se rezolve în mulțimea **C** ecuațiile:

a) $w+\frac{1}{w}=2\cos a,\quad a\in(0,\pi)$; **b)** $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n+\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n=2\cos a,\quad n\in\mathbf{N}^*, a\in(0,\pi)$.

5. Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Dacă $z_1\cdot z_2\cdot z_3\neq -1$. Să se arate că:

$$\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1z_2z_3+1}\in\mathbf{R}.$$

Clasa a XI-a

1. Fie $\sigma\in S_5,\quad \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$.

a) Să se determine $k\in\mathbf{N}^*$, minim, astfel încât $\sigma^k=\mathbf{e}$;

b) Să se calculeze σ^{2010};

c) Să se arate că oricare ar fi $\sigma\in S_n$, există $k\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $\sigma^k=\mathbf{e}$.

2. **a)** Să se calculeze $\begin{pmatrix}\cos a&\sin a\\-\sin a&\cos a\end{pmatrix}^n, n\in\mathbf{N}^*$;

b) Dacă $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, să se determine $A^n, n\in\mathbf{N}^*$.

3. Folosind proprietățile determinanților, să se arate că

$$\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3\end{vmatrix}=2abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=\frac{2^n}{n!}$;

b) $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}$;

c) $a_n=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n+1}$.

5. Să se arate că funcția $f:\left(\frac{1}{2},2\right)-\{1\}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}$ nu are limită în punctul $x_0=1$.

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $G=(1,2)\cup(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție:

„$\circ$”: $G\times G\to G$

$(x,y)\to x\circ y=(x-1)^{\ln(y-1)}+1$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) G nu este parte stabilă în raport cu legea dată.

b) Legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

c) Legea de compoziție „$\circ$” admite ca element neutru numărul **e** = 2.

d) $(G,\circ)$ este grup abelian.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Să se arate că dacă pentru $\forall x,y\in G$ au loc relațiile $(x\cdot y)^3=(y\cdot x)^3$ și $(x\cdot y)^4=(y\cdot x)^4$, atunci G este grup comutativ.

3. Fie șirul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

a) Să se calculeze I_1 și I_2.

b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit.

4. Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x+1-[x]}$.

a) Să se arate că f este integrabilă Riemann.

b) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Soluții

Clasa a IX-a

1. $\left[\dfrac{x+7}{9}\right]=\dfrac{x-1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}\leq\dfrac{x+7}{9}<\dfrac{x-1}{2}+1\\ \dfrac{x-1}{2}\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leq\dfrac{x+7}{9}-\dfrac{x-1}{2}<1\\ \dfrac{x-1}{2}\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\leq 2x+14-9x+9<18\\ \dfrac{x-1}{2}\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leq -7x+23<18\\ \dfrac{x-1}{2}\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-23\leq -7x<-5\ |:(-7)\\ \dfrac{x-1}{2}\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{7}<x\leq\dfrac{23}{7}\\ \dfrac{x-1}{2}\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{23}{7}\right]\\ x-1\in\{0,2,4,\dots\}\end{cases}\Rightarrow\underline{x\in\{1,3\}}$$

2. $a+b\leq a^2+b^2$ dacă $a\cdot b\geq 1$.

$$a+b\leq a^2+b^2\ |\cdot 2\iff 2a^2+2b^2\geq 2a+2b\iff a^2-2a+1+b^2-2b+1+a^2+b^2-2\geq 0\iff$$

$$\iff(a-1)^2+(b-1)^2+(a^2+b^2-2)\geq 0$$

$$\text{dar: } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2+b^2 \geq 2ab \\ \text{dar: } ab \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2 \Rightarrow \underline{a^2+b^2-2 \geq 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a-1)^2 \geq 0 \\ (b-1)^2 \geq 0 \\ a^2+b^2-2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{(a-1)^2+(b-1)^2+(a^2+b^2-2) \geq 0} \text{ atunci}$$

$$a+b \leq a^2+b^2$$

3. $a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2$

cum $a+\frac{1}{a} \in \mathbf{Z}$ rezultă că: $a^4+\frac{1}{a^4} \in \mathbf{Z}$

Pentru a găsi un număr irațional a este suficient să dăm o valoare întreagă lui $a+\frac{1}{a}$ astfel:

$$a+\frac{1}{a}=3 \Rightarrow a^2-3a+1=0 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{a=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$$

4. Pentru a demonstra inegalitatea: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$ vom utiliza metoda inducției complete. Fie:

$$P(n): \quad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

$$P(2): \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{7}{12}>\frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

Presupunem adevărată relația pentru n

$$P(n): \quad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

Demonstrăm pentru $n+1$

$$P(n+1): \quad \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}>\frac{13}{24}$$

Dacă notăm cu:

$$E(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

atunci:

$$E(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

Făcând diferența dintre:

$$E(n+1)-E(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0 \Rightarrow E(n+1)-E(n)>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} E(n+1)>E(n) \\ \text{dar: } E(n)>\frac{13}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow E(n+1)>E(n)>\frac{13}{24} \Rightarrow P(n+1) \text{ este}$$

5. Fie $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ **a.î.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$

$[MB] \equiv [NC] \Rightarrow [AM] \equiv [AN]$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AS}$ unde $[ANSM]$ paralelogram şi deducem că $[ANSM]$ este romb, de unde rezultă că $(AS$ este bisectoarea $\angle BAC$.

Fie E mijlocul lui (BC)

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{NE} = -2\overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{QE} \Rightarrow$$

$$2\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{AS} \text{ deci } \underline{DF \parallel AS}$$

Clasa a X-a

1.

$$E(x,y) = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y}\right) \cdot \frac{(x^3y)^{\frac{1}{2}}}{x+y} + \frac{2y}{y-x} = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+\sqrt{x}y} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-\sqrt{x}y}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y}}{x+y} + \frac{2y}{y-x} = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right) \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{2y}{y-x} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(x-y)} \cdot \frac{x\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{2y}{y-x} = \frac{2(x+y)}{x-y} \cdot \frac{x}{x+y} + \frac{2y}{y-x} = \frac{2x-2y}{x-y} = 2$$

$$\Rightarrow \underline{E(\sqrt{2009}, \sqrt[3]{2010}) = 2}$$

2. Dacă *a, b, c* sunt în progresie geometrică, atunci $b^2 = ac$. (1)

Egalitatea $\dfrac{\log_a x}{\log_c x} = \dfrac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} \Leftrightarrow \dfrac{\log_x c}{\log_x a} = \dfrac{\dfrac{1}{\log_x a} - \dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x b} - \dfrac{1}{\log_x c}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_x c}{\log_x a} = \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x b \cdot \log_x a} \cdot \frac{\log_x b \cdot \log_x c}{\log_x c - \log_x b} \Leftrightarrow \frac{\log_x c}{\log_x a} = \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x c - \log_x b} \cdot \frac{\log_x c}{\log_x a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x c - \log_x b} \Leftrightarrow 2\log_x b = \log_x a + \log_x c \Leftrightarrow \log_x b^2 = \log_x ac \Leftrightarrow$$

$$\underline{b^2 = ac}$$

3. **a)** (i) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2, \ \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0,$ ceea ce este adevărat.

(ii) $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}, \ \forall x, y \in (0, \infty) \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x + y \Leftrightarrow 0 \leq x + y - 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, ceea ce este adevărat.

b) Din (ii) rezultă că $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$. Dar $a, b \in (0, 1)$, atunci $x \mapsto \log_a x$ şi $x \mapsto \log_b x$ sunt descrescătoare. Rezultă $\log_a \dfrac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab}$ şi $\log_b \dfrac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab}$.

Adunăm cele două relații şi rezultă:

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} + \log_b \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

$$\log_a \sqrt{ab} + \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log_a (ab) + \frac{1}{2}\log_b (ab) = \frac{1}{2}(2 + \log_a b + \log_b a) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\log_a b + \frac{1}{\log_b a}\right) \geq 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 \qquad (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) rezultă:

$$\underline{\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.}$$

4. **a)** $w + \frac{1}{w} = 2\cos a, \quad a \in (0, \pi)$

$w^2 - 2\cos a\, w + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2 a - 4 = -4\sin^2 a \quad \Rightarrow \quad w_{1,2} = \frac{2\cos a \pm 2i\sin a}{2}$

$$\underline{w_{1,2} = \cos a \pm i\sin a}$$

b) $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 2\cos a, \quad n \in \mathbf{N}^*, a \in (0, \pi)$

Notăm $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = w$. Atunci ecuația devine: $w + \frac{1}{w} = 2\cos a$. De la punctul **a)** rezultă că $w_1 = \cos a + i\sin a, \quad w_2 = \cos a - i\sin a.$

Înlocuim prima valoare a lui *w* în notația făcută şi rezultă:

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = \cos a + i\sin a \quad \Rightarrow \quad \frac{1-z}{1+z} = \cos\frac{a+2k\pi}{n} + i\sin\frac{a+2k\pi}{n}, \quad \text{unde } k = \overline{0, n-1}.$$

Atunci:

$$z = \frac{1 - \cos\frac{a+2k\pi}{n} - i\sin\frac{a+2k\pi}{n}}{1 + \cos\frac{a+2k\pi}{n} + i\sin\frac{a+2k\pi}{n}} = \frac{2\sin^2\frac{a+2k\pi}{2n} - 2i\sin\frac{a+2k\pi}{2n}\cos\frac{a+2k\pi}{2n}}{2\cos^2\frac{a+2k\pi}{2n} + 2i\sin\frac{a+2k\pi}{2n}\cos\frac{a+2k\pi}{2n}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{a+2k\pi}{2n}}{\cos\frac{a+2k\pi}{2n}} \cdot \frac{\sin\frac{a+2k\pi}{2n} - i\cos\frac{a+2k\pi}{2n}}{\cos\frac{a+2k\pi}{2n} + i\sin\frac{a+2k\pi}{2n}} = -i\,\mathrm{tg}\frac{a+2k\pi}{2n}$$

Deci $z = -i\,\mathrm{tg}\frac{a+2k\pi}{2n}$.

Înlocuind a doua valoare a lui *w* în notația făcută rezultă:

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = \cos a - i\sin a \quad \Rightarrow \quad \frac{1-z}{1+z} = \cos\frac{a+2k\pi}{n} - i\sin\frac{a+2k\pi}{n}, \quad \text{unde } k = \overline{0, n-1}.$$

$$z = \frac{1 - \cos\frac{a+2k\pi}{n} + i\sin\frac{a+2k\pi}{n}}{1 + \cos\frac{a+2k\pi}{n} - i\sin\frac{a+2k\pi}{n}} = i\,\mathrm{tg}\frac{a+2k\pi}{2n}.$$

$z = i\,\mathrm{tg}\dfrac{a+2k\pi}{2n}$.

Deci $\underline{z \in \left\{ \pm i\,\mathrm{tg}\dfrac{a+2k\pi}{n} \,\middle|\, k=\overline{0,n-1} \right\}}$.

5. A arăta că $\dfrac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1z_2z_3+1} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{1+z_1z_2z_3} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3+z_1\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}+z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}+z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}+$$
$$+z_1z_3\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}+z_2z_3\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+\overline{z_1}z_1z_2z_3+\overline{z_2}z_1z_2z_3+$$
$$+\overline{z_3}z_1z_2z_3+\overline{z_1}\,\overline{z_2}z_1z_2z_3+\overline{z_1}\,\overline{z_3}z_1z_2z_3+\overline{z_2}\,\overline{z_3}z_1z_2z_3$$

Știm că $|z_i|=1 \Rightarrow z_i\cdot\overline{z_i}=1, \forall i=\overline{1,3}$ (1)

Atunci relația de mai sus devine:

$$z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+\overline{z_3}+\overline{z_2}+\overline{z_1}=$$
$$=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}+z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2+z_1+z_2+z_3$$

ceea ce este adevărat.

Clasa a XI-a

1. a) $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{e}$$

$$\sigma^3 = \sigma^2\cdot\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{e}$$

$$\sigma^4 = \sigma^3\cdot\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{e}$$

$$\sigma^5 = \sigma^4\cdot\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{e}$$

Rezultă $k=5 \in \mathbf{N}^*$ este minimul pentru care $\sigma^k = \mathbf{e}$.

$\underline{k=5}$

b) $\sigma^{2010} = \sigma^{5\cdot 402} = (\sigma^5)^{402} = \mathbf{e}^{402} = \mathbf{e} \Rightarrow \underline{\sigma^{2010} = \mathbf{e}}$.

c) $\mathrm{card}(S_n) = n!$

$\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots, \sigma^i, \ldots, \sigma^j, \ldots \in S_n$ $(i<j)$.

Deoarece mulțimea S_n are un număr finit de elemente (permutările de gradul *n*), există $1 \le i < j$, $i, j \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sigma^i = \sigma^j$. Fie $k = j-i \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$\sigma^{j-i} = \sigma^{j+(-i)} = \sigma^j\cdot\sigma^{-i} = \sigma^j(\sigma^i)^{-1} = \sigma^j(\sigma^j)^{-1} = \mathbf{e}.$$

2. a) Fie $M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Folosind metoda inducției matematice să arătăm că:

$P(n):\ M^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix},\ n\in\mathbf{N}^*.$

$P(1):\ M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ adevărată

$P(n+1):\ M^{n+1}=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\alpha & \sin(n+1)\alpha\\ -\sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha\end{pmatrix}$

Presupunem $P(n)$ adevărată.

$$M^{n+1}\overset{def.}{=}M^n\cdot M\overset{P(n)}{=}\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos n\alpha\cdot\cos\alpha-\sin n\alpha\cdot\sin\alpha & \cos n\alpha\cdot\sin\alpha+\sin n\alpha\cdot\cos\alpha\\ -\sin n\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos n\alpha & -\sin n\alpha\cdot\sin\alpha+\cos n\alpha\cdot\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\alpha & \sin(n+1)\alpha\\ -\sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha\end{pmatrix}$$

Rezultă $P(n+1)$ adevărată.

b) Observăm că $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3}\\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$. Conform punctului **a)** avem:

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3}\\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & \sin\frac{n\pi}{3}\\ -\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

3. $\Delta=\begin{vmatrix}a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{vmatrix}\overset{-C_1+C_2}{\underset{-C_1+C_3}{=}}\begin{vmatrix}a+b & c-a & c-b\\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2\\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3\end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix}a+b & c-a & c-b\\ a^2+b^2 & (c-a)(c+a) & (c-b)(c+b)\\ a^3+b^3 & (c-a)(c^2+ac+a^2) & (c-b)(c^2+cb+b^2)\end{vmatrix}=$$

$$=(c-a)(c-b)\begin{vmatrix}a+b & 1 & 1\\ a^2+b^2 & c+a & c+b\\ a^3+b^3 & c^2+ac+a^2 & c^2+cb+b^2\end{vmatrix}=$$

$$\overset{-C_2+C_3}{=}(c-a)(c-b)\begin{vmatrix}a+b & 1 & 0\\ a^2+b^2 & c+a & b-a\\ a^3+b^3 & c^2+ac+a^2 & cb+b^2-ac-a^2\end{vmatrix}=$$

$$=(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ a^2+b^2 & c+a & b-a \\ a^3+b^3 & c^2+ac+a^2 & (b-a)(a+b+c) \end{vmatrix}=$$

$$=(c-a)(c-b)(b-a)\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ a^2+b^2 & c+a & 1 \\ a^3+b^3 & c^2+ac+a^2 & a+b+c \end{vmatrix}\overset{-C_2(a+b)+C_1}{=}$$

$$=(c-a)(c-b)(b-a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a^2+b^2-(c+a)(a+b) & c+a & 1 \\ a^3+b^3-(c^2+ac+a^2)(a+b) & c^2+ac+a^2 & a+b+c \end{vmatrix}=$$

$$=(c-a)(c-b)(b-a)(-1)\begin{vmatrix} a^2+b^2-ac-bc-a^2-ab & 1 \\ a^3+b^3-c^2a-c^2b-a^2c-abc-a^3-a^2b & a+b+c \end{vmatrix}=$$

$$=-(c-a)(b-c)(a-b)\left[(a+b+c)(b^2-ac-bc-ab)-a^3-b^3+c^2a+c^2b+a^2c+abc+a^3+a^2b\right]=$$

$$=-(c-a)(b-c)(a-b)\cdot(ab^2-a^2c-abc-a^2b+b^3-abc-b^2c-ab^2+b^2c-ac^2-bc^2-abc-$$

$$-a^3-b^3+c^2a+c^2b+a^2c+abc+a^3+a^2b)=-(c-a)(b-c)(a-b)(-2abc)=$$

$$=\underline{2abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

4. a) $a_n=\dfrac{2^n}{n!},\quad n\geq 0;\quad a_n>0,\forall n\in\mathbf{N}.$

Metoda 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1\ \Rightarrow\ \underline{\lim_{n\to\infty}a_n=0.}$$

Metoda 2

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{n+1}<1,\quad\forall n\geq 2$. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este şir strict descrescător.

Cum $a_n>0,\forall n\in\mathbf{N}\ \Rightarrow\ \exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbf{R}$. Avem $a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}\cdot a_n$. Trecând la limită, obţinem:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ \Rightarrow\ a=0\cdot a\ \Rightarrow\ a=0$, adică $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}-2\sqrt{n+1})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3})^2-4(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+2\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2+2\sqrt{(n+2)(n+3)}+n+3-4n-4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+2\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(n+2)(n+3)}-(2n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+2\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+20n+24-4n^2+4n-1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+2\sqrt{n+1})(2\sqrt{(n+2)(n+3)}+2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(24+\frac{23}{n}\right)}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(2\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+2-\frac{1}{n}\right)}=0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{-1} = \mathbf{e}^{-1}$

5. $f:\left(\frac{1}{2},2\right)-\{1\}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}.$

i) Fie $0<x_n<1,\quad x_n\to 1$; rezultă $\frac{1}{x_n}>1 \;\Big|\cdot\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2x_n}>\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x_n}=-\infty$ (1)

ii) Fie $x'_n>1,\quad x'_n\to 1$; rezultă $0<\frac{1}{x_n}<1 \;\Big|\cdot\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2x_n}<\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x_n}=+\infty$ (2)

Din (1), (2) rezultă că nu există $\underline{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}$.

Clasa a XII-a

1. Fie $G=(1,2)\cup(2,+\infty)$, pe care se defineşte legea de compoziţie:

$$„\circ": G\times G\to G$$
$$(x,y)\to x\circ y=(x-1)^{\ln(y-1)}+1$$

Din identitatea logaritmică fundamentală $a^{\log_a A}=A$ deducem că:

$$\underline{x\circ y=(x-1)^{\ln(y-1)}+1=\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}+1}$$

cunoscând această relaţie, putem face afirmaţia că:

$$x\circ y=\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}+1=\mathbf{e}^{\ln(y-1)\ln(x-1)}+1=y\circ x \;\Rightarrow\; \underline{x\circ y=y\circ x}$$

a) *G* parte stabilă în raport cu legea dată:

p.s.) $(\forall)\, x,y\in G \;\Rightarrow\; x\circ y\in G$

$$\left.\begin{array}{l} x\in G \;\Rightarrow\; x>1 \;\Rightarrow\; x-1>0 \;\Rightarrow\; \ln(x-1)>0 \\ y\in G \;\Rightarrow\; y>1 \;\Rightarrow\; y-1>0 \;\Rightarrow\; \ln(y-1)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}>0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}+1>1 \;\Rightarrow\; x\circ y>1 \;\Rightarrow\; \underline{x\circ y\in G} \qquad \textbf{(1).}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 2 \;\Rightarrow\; x-1\neq 1 \;\Rightarrow\; \ln(x-1)\neq 0 \\ y\neq 2 \;\Rightarrow\; y-1\neq 1 \;\Rightarrow\; \ln(y-1)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}\neq \mathbf{e}^{0} \;\Big|+1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}+1\neq 2 \;\Rightarrow\; \underline{x\circ y\neq 2} \qquad \textbf{(2).}$$

Din **(1)** şi **(2)** rezultă că *G* este parte stabilă a lui **R** în raport cu „$\circ$"; atunci propoziţia:

„*G* nu este parte stabilă în raport cu legea dată”

b) $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)\quad (\forall)\, x,y,z\in G$

$$\left.\begin{array}{l} (x\circ y)\circ z=\mathbf{e}^{\ln(x\circ y-1)\ln(z-1)}+1=\mathbf{e}^{\ln(\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)}+1-1)\ln(z-1)}+1=\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)\ln(z-1)}+1 \\ x\circ(y\circ z)=\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y\circ z-1)}+1=\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(\mathbf{e}^{\ln(y-1)\ln(z-1)}+1-1)}+1=\mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(y-1)\ln(z-1)}+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)}$$

Atunci propoziția:

„legea de compoziție „$\circ$" este asociativă”

c) $(\exists)\ \mathbf{e}=2\in G$ **a. î.** $(\forall)\ x\in G:\ x\circ\mathbf{e}=\mathbf{e}\circ x=x$

$$x\circ 2=x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(2-1)}+1=x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{0}+1=x \Leftrightarrow 2=x\ (\forall)\ x\in G$$

Propoziția:

„legea de compoziție „$\circ$" admite elementul neutru $\mathbf{e}=2$.”

d) Pentru ca G să fie grup abelian trebuie ca:

c) comutativitatea – a fost demonstrată la punctul **a)**

a) asociativitatea – a fost demonstrată la punctul **b)**

e.n.) elementul neutru $\Leftrightarrow (\exists)\ \mathbf{f}\in G$ **a. î.** $(\forall)\ x\in G:\ x\circ\mathbf{f}=\mathbf{f}\circ x=x$

$$x\circ\mathbf{f}=x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(f-1)}+1=x \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(f-1)}=x-1 \Leftrightarrow \ln(x-1)\ln(f-1)=\ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(f-1)=1 \Leftrightarrow \ln(f-1)=\ln\mathbf{e} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{f}=\mathbf{e}+1}$$

s) elementul simetrizabil $\Leftrightarrow (\forall)\ x\in G\ (\exists)\ x'\in G$ **a.i.** $x\circ x'=x'\circ x=\mathbf{f}$

$$x\circ x'=\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\ln(x-1)\ln(x'-1)}+1=\mathbf{e}+1 \Leftrightarrow \ln(x-1)\ln(x'-1)=1 \Leftrightarrow \ln(x'-1)=\frac{1}{\ln(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'-1=\mathbf{e}^{\frac{1}{\ln(x-1)}} \Leftrightarrow \underline{x'=1+\mathbf{e}^{\frac{1}{\ln(x-1)}}}$$

Propoziția:

„ $(G,\circ)$ este grup abelian”

2. $x\cdot y=(x\cdot y)^4\cdot(x\cdot y)^3=(x\cdot y)^4(x\cdot y)^3=(x\cdot y)^4\left[(x\cdot y)^3\right]^{-1}=(y\cdot x)^4\left[(y\cdot x)^3\right]^{-1}=$

$=(y\cdot x)^4(y\cdot x)^3=(y\cdot x)^{4+3}=y\cdot x$

Deci: $\underline{x\cdot y=y\cdot x}$

Atunci: $(G,\circ)$ este grup abelian.

3. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1 \Rightarrow \underline{I_1=1}$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \underline{I_2=\frac{\pi}{4}}$$

b) Dacă $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ atunci:

$$0\le\sin x\le 1 \Rightarrow \sin^n x\ge\sin^{n+1}x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx \Rightarrow \underline{I_n\ge I_{n+1}}$$

Inegalitate din care se deduce că şirul este monoton

Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ atunci:

$$0 \le \sin x \le 1 \uparrow^{n} \Rightarrow 0 \le \sin^n x \le 1 \Rightarrow 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \Rightarrow \underline{0 \le I_n \le \frac{\pi}{2}}$$

Deci şirul este mărginit.

4. $f : [0, 2] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{x - [x]}{2x + 1 - [x]}$

a) dacă: $[x] = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2) \\ 2, & x = 2 \end{cases}$ atunci: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x+1}, & x \in [0, 1) \\ \dfrac{x-1}{2x}, & x \in [1, 2) \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x-1}{2x} = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f - \text{discontinuă în } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x-1}{2x} = \dfrac{1}{4} \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f - \text{discontinuă în } x = 2$$

f – funcție mărginită

Atunci din **Teorema lui Lebesgue** care spune că:

> O funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ care este mărginităşi care are un număr finit de puncte de discontinuitate, atunci funcția f este funcție integrabilă pe intervalul $[a, b]$.

b) $$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2x+1} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1-1}{2x+1} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}(x - \ln x)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln e - 0\right) + \frac{1}{2}(2 - \ln 2 - 1) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 = 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\int_0^2 f(x) dx = 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

La Sesiunea de referate ştiinţifice ale profesorilor de matematică şi ale elevilor, ediţia a VIII-a, a Liceului teoretic „Nichita Stănescu” din 8 mai 2010, Colegiul Naţional „Matei Basarab” a participat cu referatele ce vor fi prezentate în continuare.

APLICAŢII ALE DERIVATELOR ÎN FIZICĂ

De multe ori suntem tentaţi să adresăm profesorilor noştri întrebarea **„De ce trebuie să învăţăm asta ?”**.

Lucrarea noastră se doreşte a fi unul dintre multele răspunsuri care se pot da la această întrebare. Chiar şi ochiul unui neavizat poate să observe, din exemplele prezentate în lucrare, avantajele nete pe care ni le pune la dispoziţie analiza matematică.

1. Viteza şi accelerația unui mobil

Fie o axă Λ pe care s-au fixat: originea, sensul pozitiv de parcurgere şi o unitate de măsură.

Considerăm un mobil (ce poate fi asimilat unui punct pe axa Λ) şi notăm cu $x(t)$ abscisa punctului în care se află mobilul la momentul t (reprezentând spaţiul parcurs de mobil).

Diferenţa $\Delta x = x(t) - x(t_0)$ reprezintă distanţa parcursă de mobil în intervalul $[t_0, t]$.

Viteza medie a mobilului în intervalul de timp $[t_0, t]$ este: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$.

Pentru a obţine viteza instantanee a mobilului vom calcula $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$.

Este evident, din definiţia derivatei, că a doua limită de mai sus reprezintă derivata lui x în raport cu t: $v(t_0) = x'(t_0)$; notaţia uzuală din fizică fiind $v(t) = \frac{dx}{dt}$.

Ţinând cont că accelerația unui mobil se obţine ca raport între variaţia vitezei şi variaţia timpului, printr-un raţionament similar celui de mai sus vom avea: $a(t_0) = v'(t_0)$, $a(t_0) = x''(t_0)$, iar cu notaţiile specifice fizicii: $a(t) = \frac{dv}{dt}$ sau $a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$, unde $a(t_0)$ este accelerația mobilului la momentul t_0.

Exemple

1. Se dă legea de mişcare a unui mobil de forma $x(t) = 3t^2 + 2t - 5$. Să se determine expresia vitezei momentane (instantanee) a mobilului.

<u>*Soluţia*</u> – (utilizarea exclusiv a cunoştinţelor de clasa a IX-a).

Se consideră t' un moment de timp ulterior lui t; $\Delta t = t' - t \Rightarrow t' = \Delta t + t$.

La momentul t' avem:

$$x(t') = 3t^2 + 2t - 5 = 3(t + \Delta t)^2 + 2(t + \Delta t) - 5 = 3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2 + 2t + 2\Delta t - 5$$

Viteza medie este:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2 + 2t + 2\Delta t - 5 - 3t^2 - 2t + 5}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\Delta t(6t + 3\Delta t + 2)}{\Delta t} = 6t + 2 + 3\Delta t$$

Viteza instantanee se obține pentru $\Delta t \to 0 \Rightarrow \boxed{v(t) = 6t + 2}$

<u>*Soluția 2*</u> – (utilizarea derivatei)

Dacă legea de mişcare a mobilului este de forma: $x(t) = 3t^2 + 2t - 5$, atunci:

$$v(t) = x'(t) = (3t^2 + 2t - 5)' = 6t + 2,$$

sau altfel scris: $v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t + 2 \Rightarrow \boxed{v(t) = 6t + 2}$.

Este evident faptul că prin utilizarea derivatei, rezolvarea este mult mai rapidă şi mai simplă. Acest fapt se observă cu atât mai mult cu cât este mai complicată legea de mişcare.

2. Se consideră o mişcare oscilatorie dată de legea: $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Să se determine viteza şi accelerația specifice acesteia.

<u>*Soluție*</u>

Utilizarea derivatei conduce imediat la rezolvarea problemei:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

2. Intensitatea curentului electric

a) Considerăm un conductor. Prin secțiunea transversală a acestuia trece, în intervalul de timp $[0, t]$ sarcina $Q(t)$.

Intensitatea curentului electric ce trece prin acel conductor este raportul dintre variația sarcinii şi variația timpului; considerând un interval $[t_0, t]$, vom avea intensitatea medie: $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$.

Intensitatea curentului electric la momentul t_0 este obținută prin:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0) = Q'(t_0).$$

Am obținut astfel formula intensității curentului electric:

$$I(t) = Q'(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

Exemplu

Să considerăm o sarcină electrică variabilă în timp, dată de ecuația: $Q(t) = 5t + 4$.

Să se calculeze intensitatea curentului electric.

Soluţie

Intensitatea curentului electric va fi:

$$I(t)=\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(5t+4)=5 \Rightarrow \boxed{I(t)=5A}$$

b) O aplicaţie deosebit de utilă a derivatei apare la tema *Transferul optim de putere într-un circuit electric.*

Exemplu

O sursă cu tensiunea electromotoare $E=120V$ şi rezistenţa internă $r=10\Omega$ debitează pe un circuit exterior un curent cu intensitatea $I=2A$. Să se determine rezistenţa circuitului exterior astfel încât puterea debitată pe acesta să fie maximă şi valoarea maximă a acestei puteri.

Soluţia1 (rezolvare apelând la cunoştinţe de clasa a X-a)

Puterea disipată pe circuitul exterior este:

$$\left.\begin{array}{l} P=RI^2 \\ I=\dfrac{E}{R+r} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{RE^2}{(R+r)^2}$$ şi are valoarea maximă dacă $\frac{R}{R+r}$ este maxim.

Fie $a=\frac{R}{(R+r)^2}$ şi cum $a=\max \Rightarrow R=aR^2+2aRr+ar^2 \Rightarrow$

$$aR^2+R(2ar-1)+ar^2=0 \Rightarrow \Delta=1-4ar\geq 0 \Rightarrow a\leq\frac{1}{4r} \Rightarrow a_{\max}=\frac{1}{4r} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R=\frac{1-2ar}{2a}=r \Rightarrow$ pe circuitul exterior puterea disipată este maximă numai dacă rezistenţa circuitului exterior este egală cu rezistenţa internă a bateriei.

Ca urmare, valoarea puterii maxime este dată de formula:

$$P_{\max}=\frac{E^2}{4r}=360W \text{ şi } \boxed{r=R=10\Omega}.$$

Soluţia 2 – (rezolvare cu ajutorul derivatei)

Putem considera puterea ca fiind o funcţie de rezistenţa electrică externă, care este variabilă.

$$P(R)=\frac{RE^2}{(R+r)^2}.$$

Această funcţie atinge extremul în punctul în care se anulează derivata de ordin I:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dP}{dR}=\dfrac{d}{dR}\left[\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}\right] \\ \dfrac{dP}{dR}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow E^2(R+r)^2-2RE^2(R+r)=0 \Rightarrow E^2R+E^2r-2E^2R=0 \Rightarrow$$

$$R=r \Rightarrow P_{\max}=\frac{rE^2}{4r^2}=\frac{E^2}{4r}.$$

3. Densitatea liniară de masă

Considerăm o masă materială sub forma unei bare, ce poate fi asimilată unui interval $[a,b]$.

Pentru $(\forall)\, x \in [a,b]$, notăm cu $m(x)$ masa porţiunii din bară cuprinsă în intervalul $[a,x]$. Fixând un punct $x_0 \in (a,b)$, raportul $\frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0}$ cu $x \neq x_0$ reprezintă densitatea medie de masă între punctele x şi x_0.

Pe intervale mici se poate considera că masa este repartizată omogen şi, pornind de la situaţia ideală, avem densitatea liniară de masă în x_0:

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0} = m'(x_0).$$

Exemplu

Considerăm că intervalul $[0,4]$ reprezintă o masă materială astfel încât $m(x) = x^3 + 3x$. Să se calculeze densitatea în punctul 2.

<u>*Soluţie*</u>

$$\left.\begin{array}{l} \rho(2) = m'(2) \\ m'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow m'(2) = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\rho(2) = 15}$$

Elevi: *Stan Ioana, Medeleţ Raluca, cls. a XI_a B*
Colegiul Naţional „Matei Basarab”
Profesori coordonatori:
Emilia Iancu, Colegiul Naţional „Matei Basarab”
Stan Alice – Liceul Teoretic „Benjamin Franklin”

Bibliografie

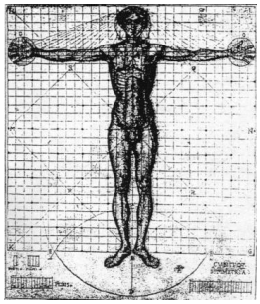
[1] M. Chiriţă: *Culegere de probleme propuse şi rezolvate pentru clasa a IX-a*, Editura Tamar, 2006
[2] M. Chiriţă: *Culegere de probleme propuse şi rezolvate pentru clasa a X-a*, Editura Tamar, 2008

NUMĂRUL DE AUR
(PROPORŢIA DE AUR, DIVIZIUNEA DE AUR)

Să începem cu o problemă de estetică. Să considerăm un segment de dreaptă [*AB*]. Care este cea mai „plăcută” împărţire a acestui segment în două părţi ? Unii ar spune că în două jumătăţi, alţii ar spune că în proporţie de 3:1. Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc „simetrie dinamică”).

Dacă părţii stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u = 1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v = 0{,}618\ldots$. Despre un segment astfel proporţionat spunem că este împărţit în *Secţiunea* (sau *Proporţia, Diviziunea*) *de aur* (*divină*).

$$A \bullet \underbrace{\qquad\qquad}_{u}\underbrace{\qquad\qquad}_{v} \bullet B$$



$$\frac{u}{u+v}=\frac{v}{u}\Leftrightarrow\frac{u+v}{u}=\frac{u}{v}\Leftrightarrow 1+\frac{v}{u}=\frac{u}{v}\Leftrightarrow\frac{u}{v}-\frac{1}{\frac{u}{v}}-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{u}{v}\right)^2-\frac{u}{v}-1=0.$$

Dacă notăm $\Phi=\frac{u}{v}$, obţinem ecuaţia $\Phi^2-\Phi-1=0$ a cărei rădăcină pozitivă este

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180339887..$$

o constantă care este numită *Numărul de aur* sau *Proporţia divină*.

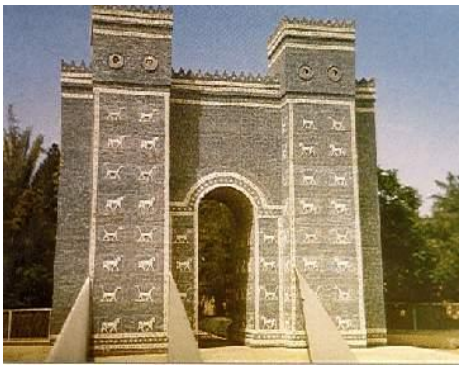
Dacă presupunem $u = 1$, atunci:

$$v=\frac{u}{\Phi}=\frac{1}{\Phi}=\Phi-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}6180339887..$$

cum am presupus mai devreme. Notăm numărul $v = 0{,}6180339887\ldots = \phi$ (phi).

Spus în cuvinte, nu pare ceva deosebit, însă figurile construite pe baza raportului de aur par a fi cele mai frumoase de pe pământ. Chiar şi în prezent, artiştii şi arhitecţii susţin că cele mai plăcute din punct de vedere estetic sunt obiectele a căror lungime şi lăţime se află în acest raport, care guvernează proporţiile multor opere de artă şi arhitectură. Unii istorici şi matematicieni susţin că Pantenonul, măreţul templu din Atena, a fost realizat în aşa fel încât raportul de aur să fie clar evidenţiat în fiecare aspect al construcţiei. Chiar şi natura pare să aibă în vedere, în planurile sale, un asemenea raport. Comparaţi proporţiile oricăror două camere succesive ale cochiliei de nautil, sau observaţi relaţia dintre solzii dispuşi în sensul acelor de ceasornic şi cei dispuşi în sens invers acelor de ceasornic ai unui ananas, şi veţi vedea că rapoartele descoperite se apropie de raportul de aur .

Se pare că expresia <u>*sectio aurea*</u> îi aparţine lui Leonardo da Vinci. El aduce argumente în favoarea acestui epitet prin exemple luate din proporţiile diferitelor părţi ale corpului omenesc, ale plantelor, ale animalelor sau din arhitectură. Toate statuile antice sunt construite după această regulă. Mai mult, Leonardo da Vinci este de părere că *secţiunea de aur* este canonul după care ar trebui să se stabilească proporţiile dintre diferitele părţi ale aceleaşi clădiri, precum şi între volumul construit şi cel rămas liber, pentru că numai astfel poate să placă ochiului.



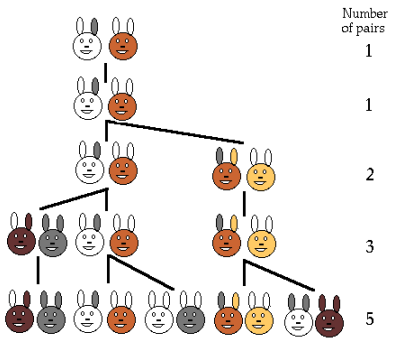
Chiar şi în prezent, artiştii şi arhitecţii susţin că cele mai plăcute din punct de vedere estetic sunt obiectele a căror lungime şi lăţime se află în acest raport, care guvernează proporţiile multor opere de artă şi arhitectură. Unii istorici şi matematicieni susţin că Pantenonul, măreţul templu din Atena, a fost realizat în aşa fel încât raportul de aur să fie clar evidenţiat în fiecare aspect al construcţiei. Chiar şi natura pare să aibă în vedere, în planurile sale, un asemenea raport.

1. Numărul de aur şi Fibonacci

Afirmăm că numărul nostru Φ (PHI) este strâns legat de şirul lui Fibonacci. Reamintim că şirul lui Fibonacci este definit prin:

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1, \ldots, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad (\forall)\, n \geq 2.$$

Folosirea *secţiunii de aur* nu-i decât un caz particular al unei reguli generale de revenire a aceleaşi proporţii în detaliile unui ansamblu. Este vorba de „legea creşterilor organice”, asupra căreia a atras atenţia întâi Leonardo Fibonacci atunci când şi-a propus să socotească numărul perechilor de iepuri de casă care provin dintr-o pereche, presupunând că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună, după ce împlinesc vârsta de două luni. De asemenea, se presupune că puii nu mor niciodată şi sunt, unul de sex masculin şi unul de sex feminin. În felul acesta, numărul de perechi de iepuri existente după *n* luni ar trebui să fie f_n. Acestei numărători îi corespunde şirul:1,1,2,3,5,8,13,21,…



Într-adevăr, la început iepuroaica naşte un pui, la o lună încă unul, după două luni amândouă, mama şi puiul, nasc câte un pui, deci 1+1=2 ş.a.m.d.

După cum se vede orice termen din şir, începând cu al treilea, este suma celor doi termeni dinaintea lui.

Şirului lui Fibonacci i se mai spune şi „legea creşterilor organice”, fiindcă prin acest şir de numere se exprimă creşterea organică sub forma ei cea mai generală.

Vă puteţi pune întrebarea: Ce poate avea în comun numărul Φ cu şirul lui Fibonacci ? Aceasta este o idee remarcabilă a matematicii.

Pentru început să observăm că:

$$\Phi=1+\frac{1}{\Phi}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}=\ldots=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}$$

Φ este o fracție infinită.

Acum să privim fracțiile parțiale:

$$1=\frac{1}{1};\ 1+\frac{1}{1}=2;\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2};\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{5}{3};\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{8}{5};\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}\ldots$$

Toate rezultatele fracțiilor sunt rapoarte de numere Fibonacci succesive, fapt ce „motivează” teorema care spune că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\Phi.$$

În cuvinte putem spune că, pe măsură ce n ia valori din ce în ce mai mari, raportul termenilor al (n +1)-lea şi al n-lea din şirul lui Fibonacci se apropie de Φ. Această teoremă este valabilă pentru orice secvență arbitrară ce satisface recurența $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ (oricare ar fi $n\geq 2$), cu proprietatea că primii doi termeni sunt dați.

2. Alte proprietăți ale numărului Φ (PHI)

Plecând de la relația:

$$1+\Phi=\Phi^2$$

prin înmulțirea succesivă cu Φ a ambilor membri ai egalității, obținem:

$$\Phi+\Phi^2=\Phi^3$$
$$\Phi^2+\Phi^3=\Phi^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Scriind termenii consecutivi într-un şir:

$$1,\Phi,\Phi^2,\Phi^3,\ldots,\Phi^n,\ldots$$

acest şir este o progresie geometrică cu rația Φ. Mai mult, orice termen al acestei progresii este egal cu suma celor doi termeni precedenți, adică termenii şirului precedent au proprietăți aditive şi totodată multiplicative.

Să ne punem acum şi problema inversă, adică să determinăm un şir de numere în aşa fel încât termenii lui să aibă proprietatea termenilor şirului lui Fibonacci.

Fie şirul $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ şi considerăm $u_n=q^{n-1}$, adică termenul general al şirului are forma unei puteri, ca în cazul unei progresii geometrice cu rația q.

Scriind proprietatea ce caracterizează şirul lui Fibonacci, avem $q^{n-1}=q^{n-2}+q^{n-3}$ şi simplificând cu q^{n-3} obținem $q^2-q-1=0$.

Regăsim relația pe care o satisface numărul de aur Φ: $\Phi^2-\Phi-1=0$.

Dar să mergem mai departe şi să scriem soluțiile acestei ecuații: $q_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ca să găsim forma cea mai generală pe care o poate lua u_n, luăm două constante arbitrare c_1 şi c_2 şi notăm:

$$u_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \qquad (1)$$

Punem condiţia $u_1 = u_2 = 1$.

Pentru n = 1 avem: $u_1 = 1 = c_1 + c_2$.

Pentru n = 2 avem: $u_2 = 1 = c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

De aici rezultă:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases} \qquad (2)$$

şi înlocuind aceste valori în (1) se obţine şirul lui Fibonacci:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Dacă notăm $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, atunci:

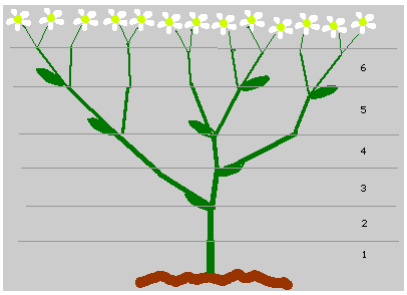
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1}{\Phi}$$

şi deci termenul general al şirului (1) se poate scrie sub forma:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \frac{(-1)^n}{\Phi^n}\right).$$

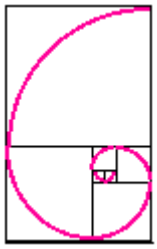
Din cele prezentate mai sus rezultă că există mai multe şiruri care au proprietatea numărului de aur şi anume toate şirurile date de relaţia (1), care se numesc şiruri dublu aditive şi au în acelaşi timp proprietatea de a fi termenii unei progresii geometrice. Obţinem astfel că şirurile considerate de noi apar ca un caz particular al unor şiruri dublu aditive mult mai generale.

Folosind numai definiţia $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 2$ şi luând primii doi termeni în mod arbitrar, obţinem alte şiruri dublu aditive, dar toate au calitatea de a reflecta numeric o însuşire a materiei vii, aceea a creşterii realizate prin compuneri succesive aditive. De pildă, botaniştii au găsit că pe o tulpină, distanţele dintre nodurile de unde se dezvoltă frunzele sunt repartizate după această lege. De asemenea, se remarcă această lege de creştere în forma cochiliilor melcilor, sau a scoicilor, a coarnelor animalelor, a unor oase, cum ar fi femurul la om, unde, deşi creşterea se face numai printr-o extremitate, se păstrează forma iniţială, transformându-se în alta mai mare, asemenea ei.



3. Reprezentarea grafică – dreptunghiuri de aur

Legătura geometrică dintre numărul Φ (PHI) şi numerele lui Fibonacci poate fi văzută în graficul alăturat. Pornind de la un dreptunghi de aur (de lungime Φ şi lăţime 1), urmează un şir natural de „cuibăriri” ale dreptunghiurilor divine în cel iniţial. Lungimea şi lăţimea celui de-al n-lea



dreptunghi de aur pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienţii sunt întotdeauna numere Fibonacci.

În aceste dreptunghiuri se poate înscrie o spirală logaritmică, aşa cum arată imaginea.

Să presupunem că punctul din colţul din stânga jos al primului dreptunghi este originea unui sistem rectangular de coordonate. Apare acum întrebarea: unde se află punctul spre care tinde spirala ? Răspunsul este: spirala tinde spre punctul de coordonate:

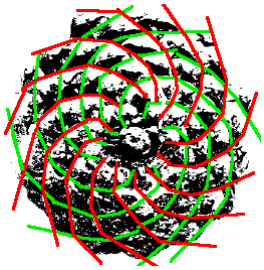
$$(x_\omega, y_\omega) = \left(\frac{1+3\cdot\Phi}{5}, \frac{3-\Phi}{5}\right).$$

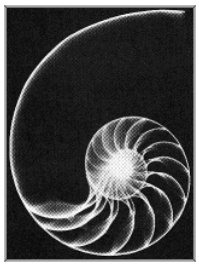
Asemenea spirale logaritmice sunt echiunghiulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul (x_ω, y_ω) taie spirala sub unghi constant.

În sensul acesta, spunem că spirala logaritmică este o generalizare a cercului, unde unghiul este de 90°, când spirala se închide transformându-se în cerc. Spirala noastră are un unghi:

$$\theta = \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\ln\Phi\right) = 72{,}968\ldots^\circ$$

Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des şi în natură. De exemplu carcasa unui melc, colţii unui elefant sau conurile de pin au formă de spirală.





Această curbă, fiind expresia geometrică a mecanismului creşterilor organice, a fost identificată şi pe femur, pe coarnele animalelor şi în foarte multe alte forme vii. Până şi ochiurile de pe coada păunului când el se umflă şi îşi desface coada în toată splendoarea ei, se aşează pe ramurile a două spirale logaritmice.

Aşa se explică şi preferinţa pe care o are ochiul omenesc pentru mărimile ale căror dimensiuni se află în raportul *secţiunii de aur*, găsindu-le în acest caz mai armonios alcătuite.

Armonia nu-i altceva decât coexistenţa normală, naturală şi deci fericită a lucrurilor sau a fiinţelor.

Reprodus de mii şi mii de ori de-a lungul mileniilor, în diferite forme din lumea plantelor şi a animalelor, ochiul omenesc s-a deprins cu raportul tăieturii de aur din moşi strămoşi şi de aceea îi place instinctiv, fără să se mai întrebe de ce. Tot aşa s-a deprins cu planul de simetrie vertical pe care-l vede în corpul lui sau al celorlalte animale şi uneori al plantelor.

Altă aplicaţie geometrică a numărului Φ (PHI) apare la desenarea unui pentagon regulat fără cerc şi compas. Aceasta este legată de faptul că: $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\Phi}{2}$; $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}$.

4. Câteva curiozităţi despre PHI şi phi

Un prim fapt ce „sare în ochi” şi este cel puţin curios îl constituie relaţia simplă între Φ, π şi **e**:

$$\Phi = \frac{7}{5}\cdot\frac{\pi}{\mathbf{e}}.$$

Pare într-adevăr ciudat cum trei numere iraţionale se „leagă” printr-o expresie atât de simplă, însă matematicienii au demonstrat că aşa stau lucrurile şi vrem nu vrem trebuie să-i credem.

Coincidenţele nu se opresc însă aici. Să considerăm următorul şir:

$$f_0 = 0{,}6180339887\ldots$$
$$f_1 = 1{,}000$$
$$f_2 = 1{,}6180339887\ldots$$

$$f_3 = 2{,}6180339887\ldots$$
$$\vdots$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Din definiţia şirului se observă că oricare doi termeni consecutivi adunaţi îl dau ca rezultat pe următorul. Este însă nevoie de un ochi ager pentru a observa că prin înmulţirea oricărui termen cu Φ = 1,6180339887… va rezulta termenul imediat următor. Aşadar, $f_{n+1} = f_n \cdot \Phi$.

Prezentăm acum câteva egalităţi simple cu Φ şi ϕ:

$$\Phi \cdot \phi = 1 \qquad \Phi - \phi = 1$$
$$\Phi + \phi = \sqrt{5}$$
$$\Phi^2 = \Phi + 1 \qquad \phi^2 = \phi + 1$$
$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n \qquad \phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$$
$$\frac{\Phi}{\phi} = \Phi + 1 \qquad \frac{\phi}{\Phi} = 1 - \phi$$

Elevi: *Călin Ioana Alexandra, cls. a X-a A Colegiul Naţional „Matei Basarab”*
Asultanei Laura, cls. a X-a A Colegiul Naţional „Matei Basarab”
Profesor coordonator: *Ion Dina, Colegiul Naţional „Matei Basarab”*

Bibliografie

[1] Charles Seife, *Zero, biografia unei idei periculoase*, Editura Humanitas, Bucureşti 2007
[2] Revista *Caleidoscop* nr. 2, a Colegiului Naţional „Matei Basarab” din Bucureşti, mai 2001 pag.14-19.

DIN ISTORIA CRIPTOGRAFIEI

Numele de criptografie vine din limba greacă: **cryptos** – ascuns şi **grafie** – scriere. Deci, criptografie înseamnă o **scriere secretă.**

Pe scurt, criptografia se ocupă de următoarele:

Expeditorul doreşte să trimită destinatarului un mesaj printr-un canal de comunicaţie, canal cu un grad ridicat de nesiguranţă. Această nesiguranţă este dată de un inamic, care doreşte – din diverse motive – să cunoască şi, eventual să modifice conţinutul mesajului.

Această confidenţialitate solicitată de **expeditor** şi **destinatar** se rezolvă de obicei prin transformarea mesajului în aşa fel încât el să nu poată fi înţeles de nici o persoană care l-ar putea intercepta.

Transformarea respectivă se numeşte criptare.

Definiţia 1. **Criptografia** se ocupă atât cu operaţia de criptare (cifrare) a unui text, cât şi cu eventualele încercări de descifrare şi de aflare a cheii de criptare.

Criptografia, din punct de vedere istoric, se poate împărţi în:

- **Criptografia clasică,** este criptografia dinaintea apariţiei calculatorului, de unde şi denumirea de **criptografie pre-computaţională**. Această criptografie se bazează pe caractere şi constă într-o serie de transformări elementare (substituţii, transpoziţii) ale caracterelor textului clar.
- **Criptografia modernă,** este criptografia bazată pe calculator (**criptografie computaţională**). În criptografia modernă lucrurile s-au complicat, dar multe dintre ideile criptografiei clasice au rămas nemodificate.

Pentru început, terminologia folosită:

- mesajul în forma sa originală este numit **text clar;**
- mesajul rescris printr-o anumită metodă se va numi **text criptat;**
- algoritmul care realizează operaţia de criptare se numeşte **cheia de criptare.**
- **Cifrul de substituţie** este cifrul bloc la care fiecare caracter sau grup de caractere ale textului clar (P) este substituit cu un alt caracter sau grup de caractere în textul cifrat (C), descifrarea făcându-se prin aplicarea substituţiei inverse asupra textului cifrat.

Definiţia 2. Un **sistem de criptare** este o structură (P,C,K, E,D), unde:

- $P = \{w \mid w \in V^*\}$ este mulţimea **„textelor cla**re", scrise peste un alfabet nevid V (uzual $V = \{0,1\}$);
- $C = \{w \mid w \in W^*\}$ este mulţimea **„textelor criptate**", scrise peste un alfabet W nevid (uzual $W = V$).
- K este o mulţime de elemente numite **chei**.
- Fiecare cheie K determină o metodă de criptare $e_K \in E$ şi o metodă de decriptare $d_K \in D$. $e_K : P \to C$ şi $d_K : C \to P$ sunt funcţii cu proprietatea $d_K(e_K(w)) = w \quad (\forall w \in P)$.

Funcţia e_K este evident injectivă; dacă e_K este bijectivă (şi deci $d_K(w) = e_K^{-1}(w)$), sistemul de criptare se numeşte **„simetric**".

Criptografia clasică se încadrează în clasa criptografiei cu chei simetrice. În criptografia clasică **există patru tipuri** de cifruri de substituţie.

1. **Cifruri de substituţie monoalfabetică** sunt cifrurile în care fiecare caracter al textului clar (P) este înlocuit cu un caracter corespondent în textul cifrat (C).**;**
2. **Cifruri de substituţie polialfabetice.** Diferenţa dintre aceste sisteme de criptare şi cele monoalfabetice constă în faptul că substituţia unui caracter variază în text, în funcţie de diverşi parametri (poziţie, context etc.). Aceasta conduce bineînţeles la un număr mult mai mare de chei posibile. Se consideră că primul sistem de criptare polialfabetic a fost creat de **Leon Battista în 1568**.
3. **Cifruri de substituţie homofonică** sunt cifrurile de substituţie intermediare între sistemele mono şi cele polialfabetice, în care un caracter al alfabetului mesajului clar (alfabet primar) poate să aibă mai multe reprezentări. Ideea utilizată în aceste cifruri, este uniformizarea frecvenţelor de apariţie a caracterelor alfabetului textului cifrat (alfabet secundar), pentru a îngreuna atacurile criptanalitice. Se pare că a fost utilizat prima oară în **1401 de către ducele de Mantua**.
4. **Cifruri de substituţie poligramică** se obţin substituind blocuri de caractere ale alfabetului primar - numite poligrame - cu alte blocuri de caractere.

Cifruri de substituţie monoalfabeticã

Cifruri de substituţie monoalfabetică sunt cifrurile în care fiecare caracter al textului clar (P) este înlocuit cu un caracter corespondent în textul cifrat (C). Există mai multe cifruri de substituţie monoalfabetică, dintre care cele mai cunoscute sunt:

- **sistemele bazate pe permutări;** la aceste sisteme de criptare, textul clar se împarte în blocuri de n $(n \geq 2)$ caractere, după care fiecarui bloc i se aplică o permutare fixată.
  - **sisteme de criptare** care folosesc permutări de grad n cu $n < 26$
    - **sistem de criptare** care folosesc permutări de grad 3
    - **sistemul de criptare Richelieu**.
  - **sisteme de criptare care folosesc** permutări de grad n = 26
    - **Cifrul lui Cezar;**
    - **Cifrul lui Cezar cu cheie;**
    - **Generalizarea cifrului lui Ceazr** numit **sistem de criptare afin;**
  - **Cifrul lui Hill**
- **alte tipuri de criptare**
    - Sistemul de **criptare Polybius**;
    - Sistemul de **criptare al cavalerilor de Malta;**

Exemple:

Exemplul 1. Să presupunem că vom lua drept cheie de criptare permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Atunci un **text clar**, de exemplu **FLOARE ALBASTRA** pentru criptare se va împărţi în grupe de câte trei caractere:

FLO ARE _AL BAS TRA

$$\begin{pmatrix} F & L & O \\ L & F & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & R & E \\ R & A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ & A & L \\ A & _ & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & A & S \\ A & B & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & R & A \\ R & T & A \end{pmatrix}$$

Textul criptat va fi:

LFO RAE A_L ABS RTA

Din motive suplimentare de securitate, spaţiile dintre cuvinte se ignoră de obicei, şi atunci **textul criptat** va fi:

LFORAEA_LABSRTA

Pentru decriptare se va folosi matricea inversă $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

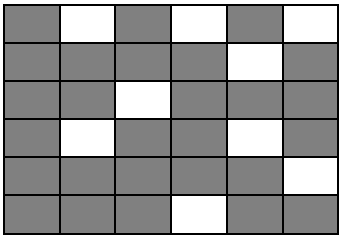
Textul criptat **LFORAEALABSRTA** se va împărţi în grupe de trei caractere

LFO RAE A_L ABS RTA

$$\begin{pmatrix} L & F & O \\ F & L & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & A & E \\ A & R & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & _ & L \\ _ & A & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & S \\ B & A & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T & A \\ T & R & A \end{pmatrix}$$

FLOARE ALBASTRA

Exemplul 2. Un sistem celebru de criptare care foloseşte permutările este **sistemul Richelieu**. Acest sistem de criptare a fost prezentat şi în literatură de *Jules Vernes,* în romanul *Mathias Sandorf***.**



Fie **textul clar**: **EMINESCU A FOST UN MARE POET NATIONAL**

Pentru a cripta acest mesaj se ia un carton de dimensiune 6 x 6 căsuţe în care luăm aleator mai multe găuri, de exemplu, 9 găuri ca în figura alăturată.

Vom scrie textul care trebuie criptat sub forma unui tabel de aceeaşi dimensiune cu cartonul şi anume de şase linii şi şase coloane.

E	M	I	N	E	S
C	U		A		F
O	S	T		U	N
M	A	R	E		P
O	E	T		N	A
T	I	O	N	A	L

Aplicând cartonul peste acest text, vor rămâne vizibile 9 caractere, citite de la stânga la dreapta şi de sus în jos:

E	M	I	N	E	S
C	U		A		F
O	S	T		U	N
M	A	R	E		P
O	E	T		N	A
T	I	O	N	A	L

Acestea sunt: **MNS TA AN**

Vom roti acum cartonul cu 90° în sensul acelor de ceasornic şi-l vom aşeza peste textul de criptat

E	M	I	N	E	S
C	U		A		F
O	S	T		U	N
M	A	R	E		P
O	E	T		N	A
T	I	O	N	A	L

Textul criptat va fi: **_F MPTNIL** (primul caracter a fost un spaţiu şi l-am marcat cu _ pentru a-l face vizibil)

La a treia rotaţie a cartonului vom obţine următoarea situaţie:

	M	I	N	E	S
C	U		A		F
O	S	T		U	N
M	A	R	E		P
O	E	T		N	A
T	I	O	N	A	L

iar textul criptat va fi: **ICUSUEETOA**

La a patra rotaţie a cartonului se va obţine:

E	M	I	N	E	S
C	U		A		F
O	S	T		U	N
M	A	R	E		P
O	E	T		N	A
T	I	O	N	A	L

EEUAONRO_

Deci textul **criptat** va fi:

MNS TA AN F MPTNIL ICUSUEETOA EEUAONRO

Pentru **decriptare** se vor efectua aceleaşi operaţii.

Exemplul 3. Unul din primele sisteme de criptare cunoscute este **sistemul de criptare Cezar**. Conform istoricului Suetoniu, el a fost folosit de Cezar în corespondenţa sa.

Să considerăm alfabetul latin:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Fie **k** un număr întreg din intervalul [0, 25]. El se va numi **„cheie de criptare”.** Rescriem alfabetul latin permutat ciclic, începând însă cu litera având numarul de ordine k (litera A are numărul de ordine 0). Această nouă scriere o aşezăm sub prima scriere, astfel (am presupus k = 2):

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B

Să presupunem că avem un **text clar NIMIC NOU** pe care vrem să-l criptăm cu **sistemul Cezar.**

Pentru aceasta vom aşeza sub fiecare literă a acestui text, litera aflată pe linia a doua din tabelul de mai sus, astfel:

N I M I C N O U
P K O K E P Q W

Textul criptat obţinut este **PKOKE PQW** . Din motive suplimentare de securitate, spaţiile dintre cuvinte se ignoră de obicei şi atunci **textul criptat** va fi:

PKOKEPQW

Pentru **decriptare cheia** va fi, 26−*k*. Pe baza ei se vor putea construi cele două linii ale tabelului, după care scriem textul criptat pe prima linie, iar pe a doua linie determină literele corespunzatoare, conform tabelului.

În cazul $k = 2$, vom folosi drept cheie numărul 26−2 = 24, iar tabelul (litera 24 corespunde lui Y) este:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X

Literele PKOKEPQW determină pe a doua linie textul **NIMICNOU**.

Să rescriem sistemul Cezar în termenii **Definiţiei 2**. Deoarece textele clare şi cele criptate folosesc alfabetul latin, vom efectua în prima etapă o operaţie de ”codificare”: asociem literelor numere întregi din intervalul [0, 25]:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

În acest fel putem opera matematic pe un inel finit: $\mathbf{Z}_{26}$. Vom avea $P = C = K = \mathbf{Z}_{26}$. Pentru un k ales arbitrar,

$$e_k(m) = m + k \pmod{26} \quad \text{şi} \quad d_k(\alpha) = \alpha - k \pmod{26}$$

În cartea sa *De bello gallico*, Cezar aminteşte de un sistem de criptare, fără să dea detalii. Mai târziu, Suetoniu – în *Viaţa lui Iulius Cezar* descrie sistemul. Cezar folosea sistemul înlocuind literele romane cu cele greceşti şi folosea deplasarea $k = 3$. Nepotul lui Cezar, împăratul Augustus a utilizat acelaşi sistem, cu $k = 1$. Sistemul Cezar a fost utilizat mult timp. Armata rusă apela frecvent la el în 1915, ca înlocuitor pentru sistemele sale proprii de criptare, prea sofisticate la nivelul trupelor de câmp.

Evident, sistemul de criptare **Cezar** este un sistem generat de permutările ciclice din P26. Fiind numai 26 chei posibile, el este extrem de vulnerabil la atacul prin forţă brută**. Pentru a-i mări rezistenţa, s-a utilizat şi o variantă, numită sistem Cezar cu cheie, definită astfel:**

Exemplul 4. **Se consideră un cuvânt (cheie), preferabil cu toate caracterele distincte (în caz contrar, literele identice se folosesc doar la prima apariţie). Acest cuvânt se aşează la începutul alfabetului. După ce se termină, şirul se completează cu literele care nu existau în cuvântul cheie, în ordine alfabetică.**

De exemplu, să presupunem că s-a ales cuvântul cheie **MARTOR.** Scriem:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
M	**A**	**R**	**T**	**O**	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	P	Q	S	U	V	W	X	Y	Z

Să presupunem că avem un **text clar NIMIC NOU** pe care vrem să-l criptăm cu **sistemul Cezar cu cheie.**

Pentru aceasta vom aşeza sub fiecare literă a acestui text, litera aflată pe linia a doua din tabelul de mai sus, astfel:

N	I	M	I	C		N	O	U
J	E	I	E	R		J	K	U

Textul criptat obţinut este **JEIER JKU** . Din motive suplimentare de securitate, spaţiile dintre cuvinte se ignoră de obicei şi atunci **textul criptat** va fi:

JEIERJKU

Pentru decriptare vom folosi permutarea inversă:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	A	Q	E	R	S	C	T	D	U	V	W	X	Y	Z

Pentru **decriptare** se va lua textul criptat care se aşează pe prima linie, iar dedesubt va apărea textul în clar:

J	E	I	E	R	J	K	U
N	**I**	**M**	**I**	**C**	**N**	**O**	**U**

Sistemul Cezar cu cheie rezistă mai bine la atacul cu forță brută, numărul cheilor fiind acum

$$\mathrm{card}(P_{26}) = 26!$$

O generalizare a sistemului de criptare Cezar este:

Exemplu 5. Sistemul de criptare afin.

Vom avea $P = C = \mathbf{Z}_{26}$, $K = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z}_{26}, c.m.m.d.c.(a, 26) = 1\}$, iar funcțiile de criptare şi decriptare (pentru o cheie $k = (a, b)$) sunt:

$$e_k(x) = ax + b \pmod{26}, \quad d_k(y) = a^{-1}y + a^{-1}(26 - b) \pmod{26}$$

Condiția ca a să fie prim cu 26 asigură existența lui a^{-1} în $\mathbf{Z}_{26}$.

De exemplu, pentru $a = 3$, $b = 5$ atunci funcția de criptare este $e_k(x) = 3x + 5 \pmod{26}$, care poate fi reprezentată prin tabelul:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	8	11	14	17	20	23	0	3	6	9	12	15	18	21	24	1	4	7	10	13	16	19	22	25	2

sau – scris direct pentru caractere:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
F	I	L	O	R	U	X	A	D	G	J	M	P	S	V	Y	B	E	H	K	N	Q	T	W	Z	C

Astfel, **textul clar** PRIMAVARA TARZIE se criptează în YEDPFQFEF KDECDR.

Deoarece $3^{-1} = 9 \pmod{26}$, decriptarea se realizează matematic folosind funcția $d_k(y) = 9y + 7 \pmod{26}$ (sau – practic – inversând cele două linii ale tabelului de mai sus). Condiția c.m.m.d.c. (a, 26) = 1 asigură de asemenea injectivitatea aplicației e_k.

De exemplu, pentru $e_k(x) = 10x + 1$, A şi N se transformă ambele în B, iar O nu apare ca imagine în alfabetul substituției.

Să studiem mulțimea cheilor K. Orice cheie $k \in K$ este determinată complet de valorile întregi (a, b) cu (a, 26) = 1. Sunt posibile 12 valori pentru $a \in \{1,3,5,7,9,11,15,19,21,23,25\}$. Pentru b sunt posibile 26 valori, care se iau independent de a, cu singura excepție a = 1, b = 0 (care se exclude deoarece nu conduce la nici o criptare). Deci card(K) = 311, număr suficient de mic pentru reuşita unui atac prin forță brută.

Exemplul 6. Cifrul lui Hill

Acest sistemul de **criptare Hill**, a fost **creat în 1929 de Lester Hill**.

Fie $d \geq 2$ un număr întreg fixat. Se definesc:

$$P = C = (\mathbf{Z}_{26})^d, \quad K = \{M \mid M \in \mathcal{M}_d(\mathbf{Z}_{26}), \det(M) \neq 0\}.$$

Deci o cheie de criptare este o matrice M pătrată nesingulară de dimensiune d, cu elemente din $\mathbf{Z}_{26}$, iar M^{-1} formează cheia de decriptare.

Textul clar w se împarte în blocuri de lungime $d: w = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$, $|\alpha_i| = d$ (ultimul bloc se completează eventual până ajunge la lungimea d). Textul criptat va fi $x = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_n$, unde $\beta_i = e_M(\alpha_i) = \alpha_i \cdot M \pmod{26}$ $1 \le i \le n$.

Pentru decriptare se foloseşte relaţia $d_M(\beta_i) = \beta_i \cdot M^{-1} \pmod{26}$.

Să luăm de exemplu d = 2 şi cheia să fie matricea $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, cu inversa $M^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}$.

Dacă **textul clar este** w = NIMIC NOU,
vom avea:

$$\alpha_1 = (N\ \ I) = (13\ \ 8),\quad \alpha_2 = (M\ \ I) = (12\ \ 8),\quad \alpha_3 = (C\ \ N) = (2\ \ 13),\quad \alpha_4 = (O\ \ U) = (14\ \ 20)$$

Din relaţiile:

$$\beta_1 = \alpha_1 M \pmod{26} = (13\ \ 8) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (55\ \ 79) = (3\ \ 1) = (D\ \ B)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 M \pmod{26} = (12\ \ 8) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (52\ \ 76) = (0\ \ 24) = (A\ \ Y)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 M \pmod{26} = (2\ \ 13) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (32\ \ 71) = (6\ \ 19) = (G\ \ T)$$

$$\beta_4 = \alpha_4 M \pmod{26} = (14\ \ 20) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (82\ \ 142) = (4\ \ 12) = (E\ \ M)$$

se obţine **textul criptat** x =DBAYGTEM.

Pentru decriptare

$$\alpha_1 = \beta_1 \cdot M^{-1} \pmod{26} = (D\ \ B) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (3\ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (65\ \ 60) = (13\ \ 8) = (N\ \ I)$$

$$\alpha_2 = \beta_2 \cdot M^{-1} \pmod{26} = (A\ \ Y) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (0\ \ 24) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (480\ \ 216) = (12\ \ 8) = (M\ \ I)$$

$$\alpha_3 = \beta_3 \cdot M^{-1} \pmod{26} = (G\ \ T) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (6\ \ 19) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (470\ \ 273) = (2\ \ 13) = (C\ \ N)$$

$$\alpha_4 = \beta_3 \cdot M^{-1} \pmod{26} = (E\ \ M) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (4\ \ 12) \cdot \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} = (300\ \ 176) = (14\ \ 20) = (O\ \ U)$$

NIMIC NOU

Elevi: *Cristian Marian Deaconu, Mădălina-Georgiana Necula, cls. a XI-a E,*
Colegiul Naţional „Matei Basarab”
Profesor coordonator: *Viorel Chiţimia, Colegiul Naţional „Matei Basarab”*

Bibliografie

[1] A. Menezes, P. Oorschot, S. Vanstome, *Handbook of Applied Cryptography*
[2] D. Stinton, *Cryptography, Theory and Practice*, Chapman & Hall/CRC, 2002
[3] Victor-Valeriu Patriciu, *Criptografia şi securitatea reţelelor de calculatoare*, Ed.Tehnică, 1994
[4] Bruce Schneier, *Applied Cryptography*, John Wiley & Sons, Inc., 1996

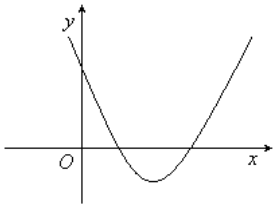
APLICAŢII PRACTICE ALE STUDIULUI FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA

Noţiuni teoretice

- O funcţie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,$ unde $a,b,c\in\mathbf{R}$ şi $a\neq 0$ se numeşte funcţie de gradul al doilea.
- Forma generală a funcţiei de gradul al doilea este: $f(x)=ax^2+bx+c$.
- Forma canonică a funcţiei de gradul al doilea este: $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$.
- **Minimul funcţiei**

  Dacă $a>0$, f are un minim: $y_{\min}=-\frac{\Delta}{4a}$, care se obţine pentru $x=-\frac{b}{2a}$.

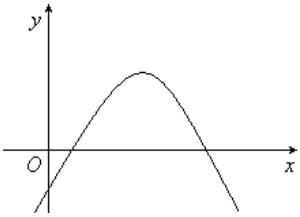
  Imaginea funcţiei este: $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a},+\infty\right)$.



- **Maximul funcţiei**

  Dacă $a<0$, f are un maxim: $y_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$, care se obţine pentru $x=-\frac{b}{2a}$.

  Imaginea funcţiei este: $\operatorname{Im} f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$.



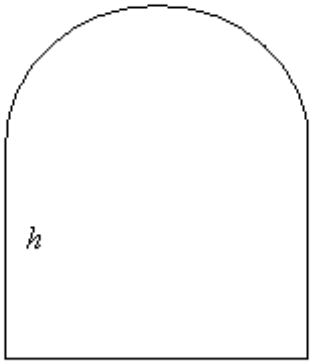
Aplicaţii practice

1. Fie o fereastră având forma din figură, la bază fiind dreptunghiulară, iar în partea de sus fiind un semicerc. Pentru ce lungime totală de toc de fereastră avem lumina maximă a ferestrei ?

<u>*Soluţie*</u>

Fie $2r$ – lungimea bazei ferestrei care este egală cu diametrul semicercului şi h înălţimea ei.

Dacă notăm cu p lungimea totală a tocului şi cu S aria totală a ferestrei, atunci:



$$p=2r+2h+\pi r$$

$$S=2rh+\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi r^2}{2}+r(p-2r-\pi r)=$$

$$=\frac{\pi r^2}{2}+rp-2r^2-\pi r^2=-\frac{(\pi+4)r^2}{2}+rp$$

Maximul lui *S* este egal cu maximul funcţiei de gradul al doilea: $f(x)=\frac{(\pi+4)x^2}{2}+px.$

Astfel $S_{\max}=\frac{p^2}{2(\pi+4)}$ şi este realizată când $x=\frac{p}{\pi+2}$. Deci $r=\frac{p}{\pi+2}$ (1)

Din egalitatea $p=2r+2h+\pi r$ şi (1) => $r=h.$

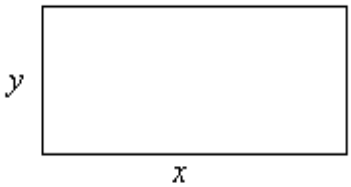
În concluzie, aria *S* este maximă pentru $r=h=\frac{p}{\pi+2}$.

2. Dintr-o sârmă cu lungimea de 10*m* se confecţionează un dreptunghi. Cum trebuie să fie acest dreptunghi pentru ca aria sa să fie maximă ?

<u>*Soluţie*</u>

Dacă *x* şi *y* sunt laturile dreptunghiului atunci:

$$2x+2y=10\,|:2 \;\Rightarrow\; x+y=5 \;\Rightarrow\; y=5-x$$



Aria dreptunghiului este:

$$S=x\cdot y=x(5-x)=5x-x^2.$$

Pentru a determina maximul lui *S* vom determina maximul funcţiei de gradul al doilea

$$f(x)=-x^2+5x,$$

unde $y_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{25}{4}$ valoare care se realizează pentru *x* = 2,5.

Atunci laturile dreptunghiului pentru care aria sa este maximă sunt egale cu:

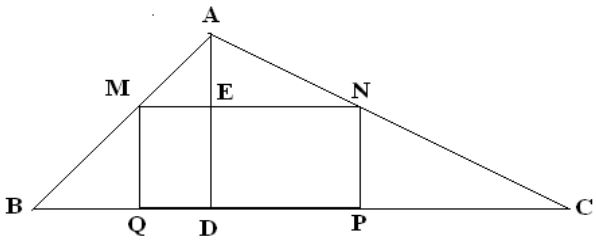
$$\begin{cases}x=2{,}5\\ y=5-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2{,}5\\ y=5-2{,}5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2{,}5\\ y=2{,}5\end{cases}$$

Dreptunghiul devine astfel pătrat, iar aria sa maximă este egală cu:

$$S_{\max}=2{,}5\cdot 2{,}5=6{,}25m^2.$$

3. Din bucăţi de materiale triunghiulare o croitoreasă vrea să croiască feţe de masă dreptunghiulare.Cum trebuie croite feţele de masă astfel încât să se piardă cât mai puţin material ?

<u>*Soluţie*</u>



Fie *ABC* un triunghi oarecare. Pe latura cea mai mare a triunghiului construim latura cea mai mare a dreptunghiului, iar celelalte două vârfuri să fie pe celelalte două laturi ale triunghiului.

Notăm:

$$BC=a;\quad AD=h;\quad MN=x;\quad MQ=y.$$

Se poate observa că:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \sim \Delta AMN \Rightarrow \dfrac{AB}{AM}=\dfrac{BC}{MN}=\dfrac{AC}{AN} \Rightarrow \dfrac{BC}{MN}=\dfrac{AC}{AN} \\ \Delta AEN \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{EN}{DC}=\dfrac{AN}{AC} \Rightarrow \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AN}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow$$

$$\frac{h-y}{h}=\frac{x}{a} \Rightarrow \underline{x=\frac{a(h-y)}{h}}.$$

Aria dreptunghiului *MNPQ* fiind egală cu $A=x\cdot y$ obţinem:

$$A=\frac{a(h-y)}{h}y=\frac{ahy-ay^2}{h}=-\frac{a}{h}y^2+ay \Rightarrow \underline{A=-\frac{a}{h}y^2+ay}$$

Având această arie, putem construi o funcţie de gradul al doilea de forma:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(z)=-\frac{a}{h}z^2+az$$

unde $-\frac{a}{h}<0$, ceea ce implică că funcţia are un maxim egal cu $y_{\max}=\frac{ah}{4}$, care se realizează pentru $z=\frac{h}{2}$.

În concluzie, $\boxed{MQ=\frac{h}{2}}$.

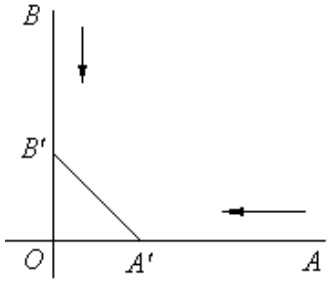
4. Din două oraşe *A* şi *B*, pe două şosele perpendiculare (*O* fiind punctul de intersecţie) pleacă în acelaşi moment două vehicule cu viteze constante v_1 şi v_2 în direcţia punctului *O*.

Distana de la *A* la *O* este *a*, iar de la *B* la *O* este *b*. Să se determine care este distanţa minimă dintre cele două vehicule.

Caz numeric: $v_1=80km/h,\quad v_2=60km/h,\quad a=120km,\quad b=100km.$

<u>*Soluţie*</u>

Presupunem că după un timp *t* de la plecarea celor două vehicule, vehiculul *A* ajunge în *A'*, iar *B* ajunge în *B'*.



Distanţa $AA'=v_1t$, iar $BB'=v_2t$.

Atunci:

$OA'=a-v_1t$, iar $OB'=b-v_2t$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $OA'B'$ rezultă că:

$$A'B'^2=OA'^2+OB'^2=(a-v_1t)^2+(b-v_2t)^2=$$
$$=(v_1^2+v_2^2)t^2-2(av_1+bv_2)t+a^2+b^2$$
$$A'B'=\sqrt{(v_1^2+v_2^2)t^2-2(av_1+bv_2)t+a^2+b^2}$$

Pentru ca distanţa *A'B'* dintre cele două vehicule să fie minimă trebuie ca expresia de sub radical să fie minimă.

Se observă că această expresie determină o funcţie de gradul al doilea de forma:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(t)=(v_1^2+v_2^2)t^2-2(av_1+bv_2)t+a^2+b^2.$$

Minimul funcţiei este:

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4\left(av_1 + bv_2\right)^2 - \left(v_1^2 + v_2^2\right)\left(a^2 + b^2\right)}{4\left(v_1^2 + v_2^2\right)} = \frac{\left(av_2 - bv_1\right)^2}{\left(v_1^2 + v_2^2\right)} \text{ pentru } t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Atunci distanța minimă $A'B' = \sqrt{\frac{\left(av_2 - bv_1\right)^2}{\left(v_1^2 + v_2^2\right)}} = \frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

În cazul numeric, $A'B' = \frac{|20 \cdot 60 - 100 \cdot 80|}{\sqrt{80^2 + 60^2}} = 8km$, pentru t = 1,5 ore.

Elevi: *Băloiu Radu, Nadă George cls. a IX-a,*
Colegiul Naţional „Matei Basarab”

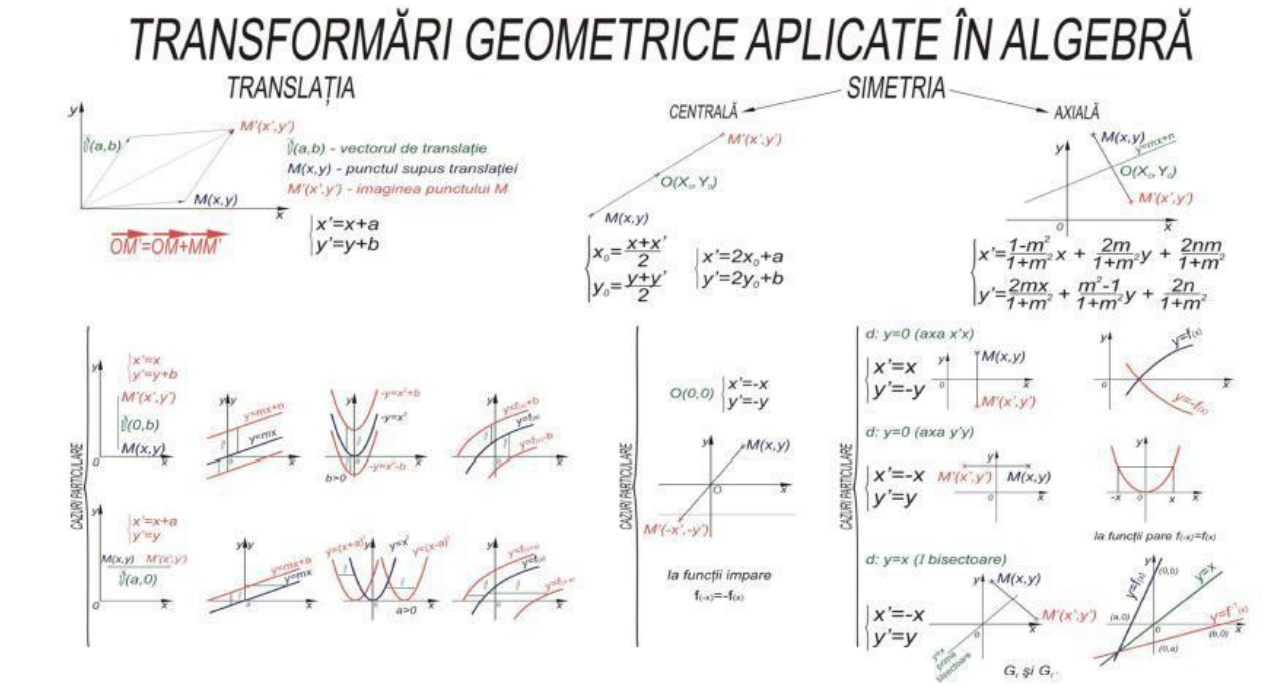
Profesor coordonator: *Minculeţ Daniela,*
Colegiul Naţional „Matei Basarab”

SOFTWARE EDUCAŢIONAL PENTRU MATEMATICĂ

Această lucrare a fost prezentată la Simpozionul Internaţional **"*Challenges and Opportunities of the New Information and Communication Technologies for Education*”**.

Lucrarea de faţă îşi propune să prezinte câteva programe educaţionale concepute de autoare şi realizate împreună cu câţiva elevi. Sunt programe utile atât la orele de matematică cât şi la cele de dirigenţie.

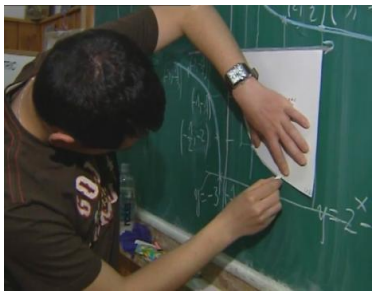
1) „Transformări geometrice aplicate în algebră” este conceput astfel încât elevii să deprindă conoştinţe şi abilităţi necesare trasării graficelor funcţiilor elementare. Se vizualizează schema în care se poate desprinde teoria ce stă la baza tratării subiectului.

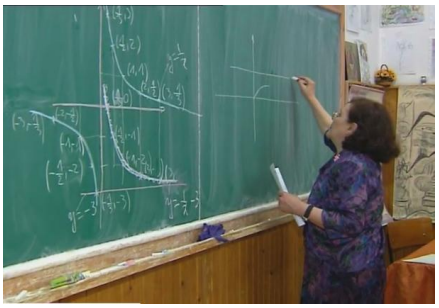


Este tratat apoi fiecare caz în parte:

- Translație după O_Y;
- Translație după O_X;
- Trasarea graficului opus unei funcții (prin simetrie față de O_X);
- Trasarea modulului unei funcții;
- Trasarea graficului funcției inverse (prin simetrie față de prima bisectoare).

Folosind animația şi şabloane programul se desfăşoară pe muzica lui Mozart în cabinetul de matematică. Pentru a ilustra cum se lucrează în cabinet folosesc imagini care au fost difuzate la Realitatea TV.





Folosind transformări geometrice în studiul funcțiilor, elevii învață din perspectiva ansamblului şi prin probleme. Se face distincție între o problemă instrument (care dă o metodă generală de rezolvare) şi problemă propriu-zisă. Elevii sunt stimulați să gândească, să descopere configurația numărului mare de funcții, precum şi proprietățile lor. Împletind perspicacitatea cu rutina, li se vor întipări în minte imaginile funcțiilor elementare şi a celor derivate din ele. Elevul devine subiect activ în procesul de învățare, inventează probleme pe care le poate rezolva apoi cu uşurință. Se dezvoltă spiritul de observație care îi va fi util în probleme ştiințifice sau practice. Se realitează si o educație estetică prin grafice. Se dezoltă atitudini creatoare, pornind de la exemple simple spre cele complexe.

Problematizarea şi metoda de lucru în grupe mici se pretează pentru dezvoltarea problemelor cu fişe de lucru, sarcini precise pentru fiecare grupă. Astfel, stilul de predare democratic se manifestă cu succes.

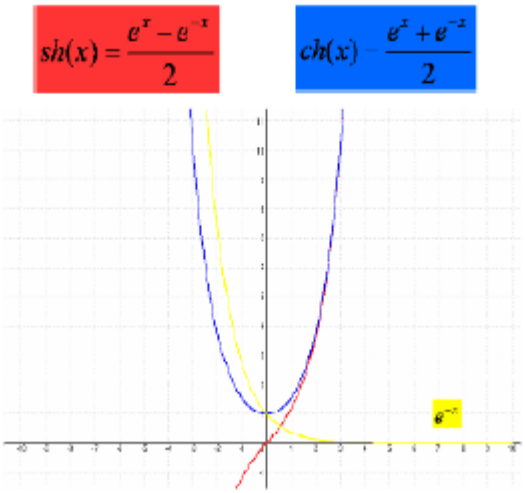
2) Particularităţi ale asimptotei

Pentru o curbă care este nemărginită în plan (nu poate fi cuprinsă într-un dreptunghi) se pune problema dacă ramurile sale nemărginite se apropie necontenit de o dreaptă *d*, adică dacă distanţa de la un punct al graficului la dreapta *d* tinde la 0 când *x* tinde către un punct de acumulare (finit sau nu) al domeniului de definiţie al funcţiei. O asemenea dreaptă, dacă există, se numeşte **asimptotă** la graficul funcţiei *f*.

Pentru o funcţie raţională:

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_0}=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$f:\mathbf{R}\setminus\{x \mid Q(x)=0\}$$



Asimptotele oblice şi cele orizontale pot fi calculate prin împărţirea polinomului $P(x)$ la $Q(x)$. Notăm câtul cu $A(x)$ şi restul cu $r(x)$. Astfel

$$f(x)=A(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Cum $\operatorname{grad} r<\operatorname{grad} Q$,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-A(x))=\lim_{x\to\infty}\frac{r(x)}{Q(x)}=0,$$

ceea ce ne arată că graficul funcţiei *f* tinde asimptotic spre graficul funcţiei $A(x)$.

Menţionez că această metodă este originală.

Este tratat fiecare caz în parte atât pentru funcţii raţionale cât şi pentru acele grafice ce pot admite şi alte curbe asimptote nu numai drepte, cum ar fi: sh(x) şi ch(x) care au graficele ce tind asimptotic unul spre altul, când x tinde spre infinit. Programul este însoţit de imagini ale graficelor funcţiilor şi ale asimptotelor.

$$\lim_{x\to\infty}(\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x))=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}-\frac{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x}}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\mathbf{e}^{-x}=0$$

Se vizualizează şi graficele unor şiruri din care se observă monotonia şi mărginirea lor.

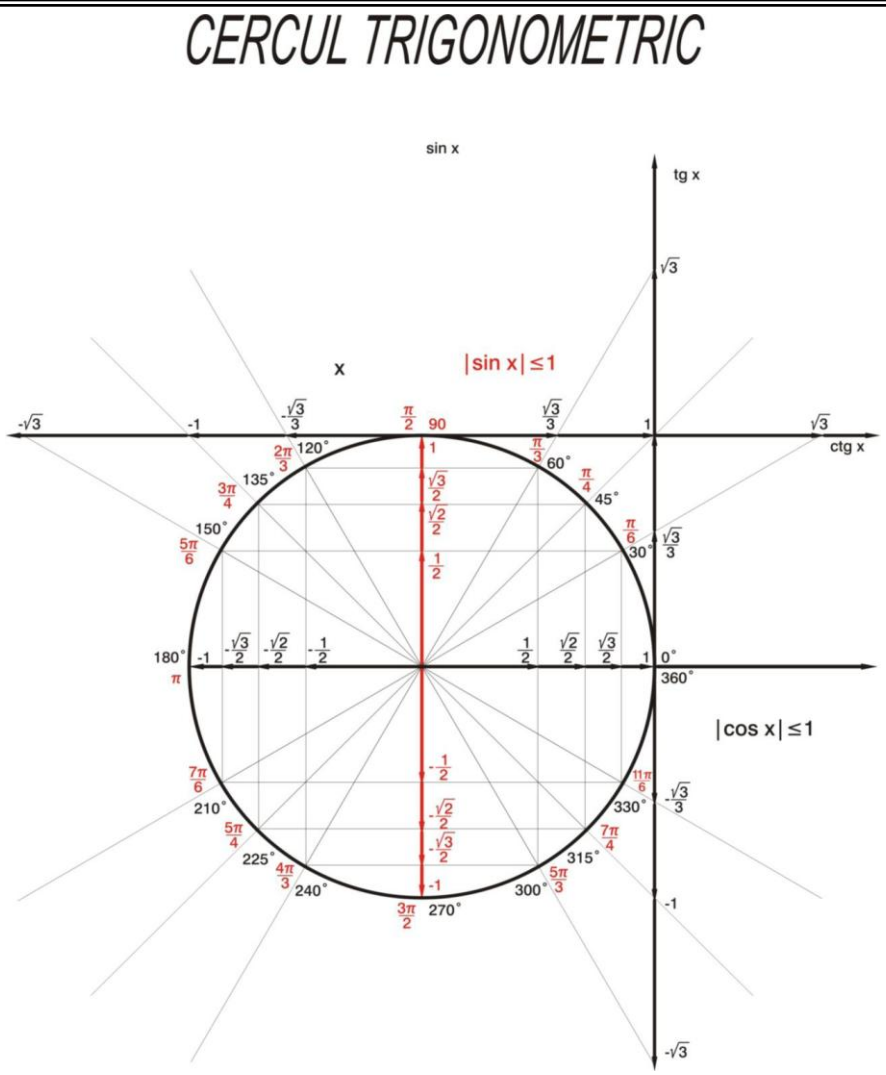
3) Aplicataţii practice ale matricelor

4) Matricele şi animaţia

5) Discutarea unor familii de funcţii

6) Cercul trigonometric conceput de mine.

Planşa tipografiată a acestuia, pe care elevii o au în portofoliul lor:



7) Aplicaţie a inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz în fizică care ilustrează un mod de îmbinare e cunoştinţelor din domeniul calculului vectorial aplicat în algebră şi apoi în fizică; în final se pot trage concluzii pentru o lecţie de dirigenţie (importanţa ritmicităţii oricărei activităţi).

Se face astfel legătura cu softurile dedicate lecţiilor de dirigenţie:

- ***Sănătatea creierului***

„La sfârşitul secolului trecut, oamenii de ştiinţă au mai demolat un mit; cel conform căruia creierul este o maşină cu care ne naştem, fără a avea posibilitatea să-i modificăm funcţionarea şi capacitatea.

Astăzi este demonstrat: creierul este un organ care creşte şi se dezvoltă permanent; mai mult, capacitatea şi vitalitatea lui depind de modul în care îl **hrănim şi** îl **tratăm**. Nu contează mărimea creierului sau numărul de neuroni, contează neurotransmiţătorii, cei care tratează „autostrăzile” creierului, făcând posibilă circulaţia gândurilor şi a sentimentelor. Ei sunt esenţa memoriei, a inteligenţei, a creativităţii şi a dispoziţiei.”

Prin acest program se arată elevilor importanţa hranei, a programului de lucru şi efectele nocive ale calculatorului şi televizorului asupra creierului.

JEAN CARPER

- ***Inteligența emoțională***

„Oricine poate deveni furios - e simplu. Dar să te înfurii pe cine trebuie, cât trebuie, când trebuie, pentru ceea ce trebuie şi cum trebuie - nu este deloc uşor” (Aristotel - *Etica nicomhaica*). Inteligența emoțională este o abilitate care implică o relaționare creativă cu stările de teamă, durere şi dorință. Este un amestec de stăpânire de sine, motivație, empatie, gândire liberă, tact şi diplomație. Aceste atribute fac persoana respectivă să aibă o inteligență emoțională ridicată iar faptul că ea le deține, o face să îşi poată controla reacțiile emoționale în raport cu alte persoane, prin conştientizarea factorilor care contribuie la apariția reacției respective. Aşadar, inteligența emoțională este capacitatea personală de identificare şi gestionare eficientă a propriilor emoții în raport cu scopurile personale (carieră, familie, educație etc). Finalitatea ei constă în atingerea scopurilor noastre, cu un minim de conflicte inter şi intra-personale.

- ***Străzi vechi din Bucureşti***

Are rolul de a trezi curiozitatea elevilor față de locurile unde s-au născut şi trăiesc, să le iubească şi să le respecte. Sunt prezentate câteva străzi vechi din Bucureşti împreună cu imaginile actuale.

Elev: *Duță Valentina, Colegiul Național „Matei Basarab”*
Profesor coordonator: *Adriana Stanciu, Colegiul Național „Matei Basarab”*

Bibliografie

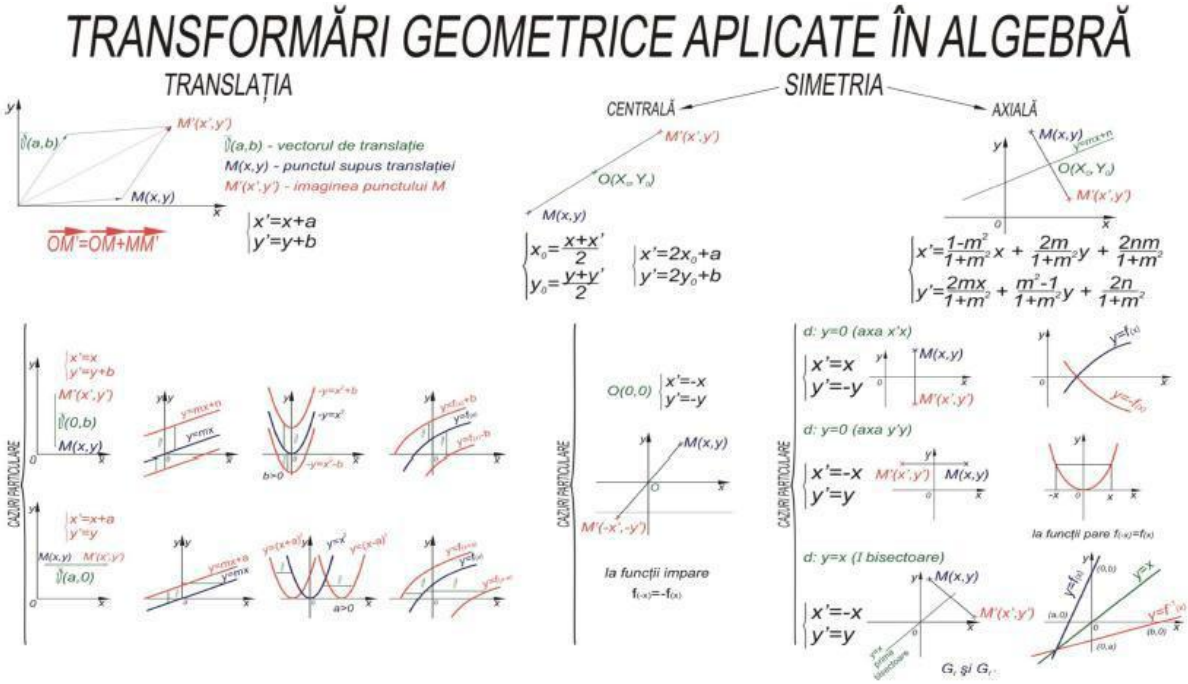
[1] Mircea Ganga, Manualele din ciclul liceal
[2] V.Postelnicu, *Mică enciclopedie matematică*
[3] Jean Carper, *Cum să-ți păstrezi sănătatea creierului*
[4] D. Goleman, *Inteligența emoțională*
[5] A.Ofrim, *Străzi vechi din Bucureşti*

SOFTWARE EDUCAȚIONAL PENTRU MATEMATICĂ

Această lucrare a fost prezentată la Simpozionul Internațional "***Challenges and Opportunities of the New Information and Communication Technologies for Education***".

Lucrarea de față îşi propune să prezinte câteva programe educaționale concepute de autoare şi realizate împreună cu câțiva elevi. Sunt programe utile atât la orele de matematică cât şi la cele de dirigenție.

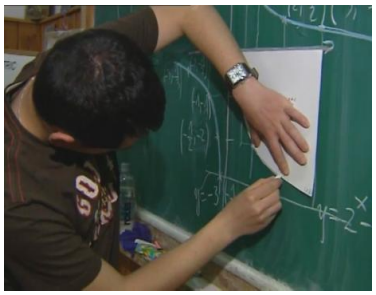
1) „Transformări geometrice aplicate în algebră" este conceput astfel încât elevii să deprindă conoştințe şi abilități necesare trasării graficelor funcțiilor elementare. Se vizualizează schema în care se poate desprinde teoria ce stă la baza tratării subiectului.

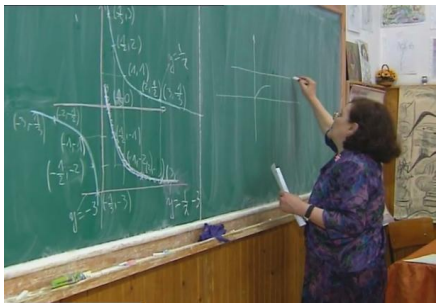


Este tratat apoi fiecare caz în parte:

- Translație după O_Y;
- Translație după O_X;
- Trasarea graficului opus unei funcții (prin simetrie față de O_X);
- Trasarea modulului unei funcții;
- Trasarea graficului funcției inverse (prin simetrie față de prima bisectoare).

Folosind animația şi şabloane programul se desfăşoară pe muzica lui Mozart în cabinetul de matematică. Pentru a ilustra cum se lucrează în cabinet folosesc imagini care au fost difuzate la Realitatea TV.





Folosind transformări geometrice în studiul funcțiilor, elevii învață din perspectiva ansamblului şi prin probleme. Se face distincție între o problemă instrument (care dă o metodă generală de rezolvare) şi problemă propriu-zisă. Elevii sunt stimulați să gândească, să descopere configurația numărului mare de funcții, precum şi proprietățile lor. Împletind perspicacitatea cu rutina, li se vor întipări în minte imaginile funcțiilor elementare şi a celor derivate din ele. Elevul devine subiect activ în procesul de învățare, inventează probleme pe care le poate rezolva apoi cu uşurință. Se dezvoltă spiritul de observație care îi va fi util în probleme ştiințifice sau practice. Se realitează si o educație estetică prin grafice. Se dezoltă atitudini creatoare, pornind de la exemple simple spre cele complexe.

Problematizarea şi metoda de lucru în grupe mici se pretează pentru dezvoltarea problemelor cu fişe de lucru, sarcini precise pentru fiecare grupă. Astfel, stilul de predare democratic se manifestă cu succes.

2) Particularități ale asimptotei

Pentru o curbă care este nemărginită în plan (nu poate fi cuprinsă într-un dreptunghi) se pune problema dacă ramurile sale nemărginite se apropie necontenit de o dreaptă *d*, adică dacă distanța de la un punct al graficului la dreapta *d* tinde la 0 când *x* tinde către un punct de acumulare (finit sau nu) al domeniului de definiție al funcției. O asemenea dreaptă, dacă există, se numeşte **asimptotă** la graficul funcției *f*.

Pentru o funcție rațională:

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_0}=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$f:\mathbf{R}\setminus\{x \mid Q(x)=0\}$$

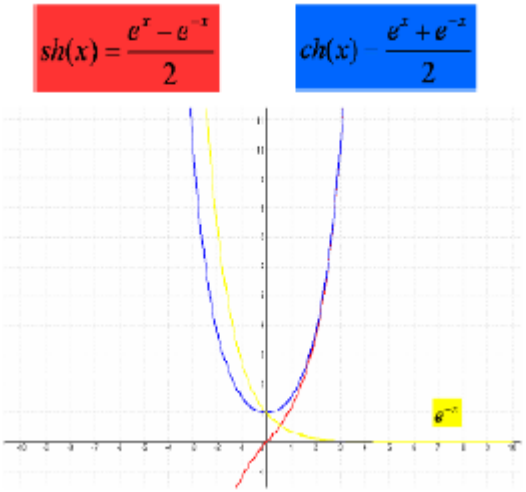
Asimptotele oblice şi cele orizontale pot fi calculate prin împărțirea polinomului $P(x)$ la $Q(x)$. Notăm câtul cu $A(x)$ şi restul cu $r(x)$. Astfel $f(x)=A(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$.

Cum $\text{grad}\, r<\text{grad}\, Q$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-A(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{r(x)}{Q(x)}=0$,

ceea ce ne arată că graficul funcției *f* tinde asimptotic spre graficul funcției $A(x)$.

Menționez că această metodă este originală.

Este tratat fiecare caz în parte atât pentru funcții raționale cât şi pentru acele grafice ce pot admite şi alte curbe asimptote nu numai drepte, cum ar fi: sh(x) şi ch(x) care au graficele ce tind asimptotic unul spre altul, când x tinde spre infinit. Programul este însoțit de imagini ale graficelor funcțiilor şi ale asimptotelor.



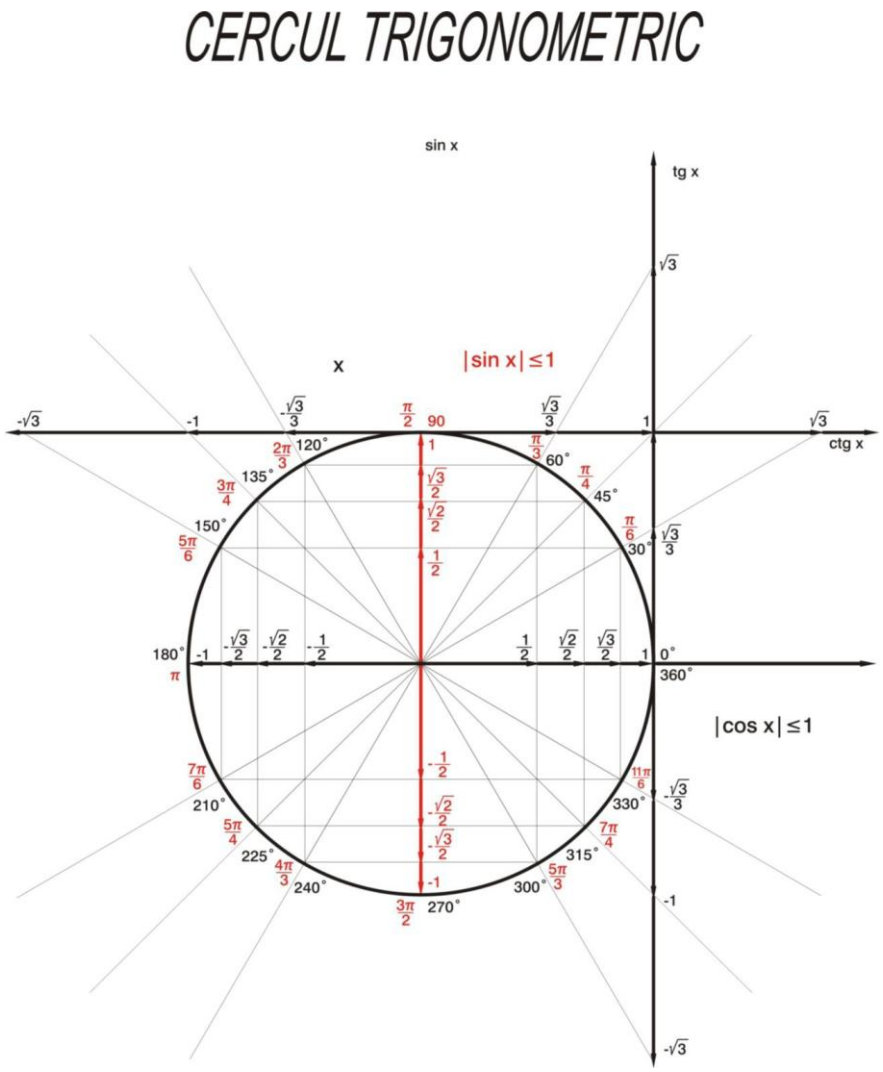
$$\lim_{x\to\infty}(\text{ch}(x)-\text{sh}(x))=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}-\frac{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x}}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\mathbf{e}^{-x}=0$$

Se vizualizează şi graficele unor şiruri din care se observă monotonia şi mărginirea lor.

3) Aplicatații practice ale matricelor
4) Matricele şi animația
5) Discutarea unor familii de funcții
6) Cercul trigonometric conceput de mine.

Planşa tipografiată a acestuia, pe care elevii o au în portofoliul lor:



7) Aplicație a inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz în fizică care ilustrează un mod de îmbinare e cunoştinţelor din domeniul calculului vectorial aplicat în algebră şi apoi în fizică; în final se pot trage concluzii pentru o lecție de dirigenție (importanța ritmicității oricărei activități).

Se face astfel legătura cu softurile dedicate lecțiilor de dirigenție:

- ***Sănătatea creierului***

„La sfârşitul secolului trecut, oamenii de ştiinţă au mai demolat un mit; cel conform căruia creierul este o maşină cu care ne naştem, fără a avea posibilitatea să-i modificăm funcționarea şi capacitatea.

Astăzi este demonstrat: creierul este un organ care creşte şi se dezvoltă permanent; mai mult, capacitatea şi vitalitatea lui depind de modul în care îl **hrănim şi** îl **tratăm**. Nu contează mărimea creierului sau numărul de neuroni, contează neurotransmițătorii, cei care tratează „autostrăzile” creierului, făcând posibilă circulația gândurilor şi a sentimentelor. Ei sunt esența memoriei, a inteligenței, a creativității şi a dispoziției.”

Prin acest program se arată elevilor importanța hranei, a programului de lucru şi efectele nocive ale calculatorului şi televizorului asupra creierului.

JEAN CARPER

- ***Inteligența emoțională***

„Oricine poate deveni furios - e simplu. Dar să te înfurii pe cine trebuie, cât trebuie, când trebuie, pentru ceea ce trebuie şi cum trebuie - nu este deloc uşor" (Aristotel - *Etica nicomhaica*). Inteligența emoțională este o abilitate care implică o relaționare creativă cu stările de teamă, durere şi dorință. Este un amestec de stăpânire de sine, motivație, empatie, gândire liberă, tact şi diplomație. Aceste atribute fac persoana respectivă să aibă o inteligență emoțională ridicată iar faptul că ea le deține, o face să îşi poată controla reacțiile emoționale în raport cu alte persoane, prin conştientizarea factorilor care contribuie la apariția reacției respective. Aşadar, inteligența emoțională este capacitatea personală de identificare şi gestionare eficientă a propriilor emoții în raport cu scopurile personale (carieră, familie, educație etc). Finalitatea ei constă în atingerea scopurilor noastre, cu un minim de conflicte inter şi intra-personale.

- ***Străzi vechi din Bucureşti***

Are rolul de a trezi curiozitatea elevilor față de locurile unde s-au născut şi trăiesc, să le iubească şi să le respecte. Sunt prezentate câteva străzi vechi din Bucureşti împreună cu imaginile actuale.

Bibliografie

[1] Prof.Mircea Ganga, Manualele din ciclul liceal
[2] V.Postelnicu, *Mică enciclopedie matematică*
[3] Jean Carper, *Cum să-ți păstrezi sănătatea creierului*
[4] D. Goleman, *Inteligența emoțională*
[5] A.Ofrim, *Străzi vechi din Bucureşti*

Profesor: *Adriana Stanciu,*
Colegiul Național „Matei Basarab", Bucureşti, România
Elev: *Duță Valentina,*
Colegiul Național „Matei Basarab", Bucureşti, România