REPERE

Pentru pregătirea probei de matematică în cadrul simulării interne a examenului de bacalaureat din ianuarie 2025

Conținuturile vizate în elaborarea itemilor subiectelor de simulare sunt următoarele:

Subiectul I
▪ Progresii aritmetice și progresii geometrice
▪ Compunerea funcțiilor
▪ Funcția de gradul I
▪ Ecuații iraționale, exponențiale și logaritmice
▪ Probabilități
▪ Vectori în reper cartezian
▪ Aplicații ale trigonometriei în geometrie
Subiectul II
▪ Calcul matriceal: operații cu matrice, determinanți, inversa unei matrice
▪ Legi de compoziție; proprietăți
Subiectul III
▪ Calculul derivatei unei funcții: derivarea funcțiilor elementare, operații cu funcții derivabile, derivarea funcțiilor compuse
▪ Tangenta la graficul unei funcții derivabile într-un punct situat pe graficul funcției
▪ Studiul variației funcțiilor cu ajutorul derivatei de ordinul I
▪ Primitive
▪ Calculul integralei definite – teorema Leibniz-Newton; metode de calcul pentru integrala definită

Fișe suport cu modele de itemi pentru recapitularea conținuturilor menționate și consolidarea competențelor specifice, prevăzute în programa de bacalaureat.

FIȘĂ DE RECAPITULARE ALGEBRĂ SUBIECT I - EXERCIȚIILE 1,2,3
progresii aritmetice și progresii geometrice, compunerea funcțiilor, funcția de gradul I, ecuații iraționale, exponențiale și logaritmice

Înainte de a rezolva exercițiile din fișă, recapitulați elementele de teorie necesare:
- *șiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcție de un termen dat și rație, suma primilor n termeni ai unei progresii*
- *condiția ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică,*
- *compunerea funcțiilor*
- *funcția de gradul I*
- *ecuații care conțin radicali de ordinul 2 sau de ordinul 3*
- *ecuații exponențiale*
- *ecuații logaritmice*

Exerciții propuse

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ și $a_7=37$. Calculați suma primilor zece termeni ai progresiei.

2. Determinați numărul real x, stiind că $x+1, 2x-3$ și $x-3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Determinați rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, stiind că $a_{10}-a_2=16$.

4. Determinați primul termen al unei progresii aritmetice cu rația 4, știind că suma primilor doi termeni este egală cu 10.

5. Calculați suma $1+11+21+31+...+111$.

6. Calculați produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ și rația egală cu $-\sqrt{2}$.

7. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=3$ și $b_2-b_1=3$.

8. Determinați numărul real x, stiind că $5-x, x+7$ și $3x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

9. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+5$. Calculați $f(2)+f(2^2)+...+f(2^5)$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^{\bullet}\to\mathbb{R}^{\bullet}, f(x)=\frac{1}{x}$. Calculați $(f\circ f)(-3)+(f\circ f)(-2)+...+(f\circ f)(3)$.

12. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1, g(x)=x^2-4x+3$. Rezolvați ecuația $(g\circ f)(x)=0$.

13. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+4, g(x)=x-1$. Arătați că $(f\circ g)(x)\geq 0,(\forall)x\in\mathbb{R}$

14. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1, g(x)=3-2x$. Arătați că funcția $f\circ g$ este strict descrescătoare.

15. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1, g(x)=-2x+5$. Determinați funcțiile $f\circ g, g\circ f, f\circ f, g\circ g$.

16. Se consideră funcția strict descrescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx+6m-1$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(4m-5,m)$ să aparțină graficului funcției f.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+16$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)+f(m+1)=37$.

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+a$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că $(f\circ f)(2)+f(2)=3$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+m$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(f(-2),2)$ aparține graficului funcției f.

20. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+m$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m, astfel încât $(f\circ f)(x)=f(x+2)$, pentru orice număr real x.

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{x+1}=5-x$; **b)** $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$; **c)** $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$; **d)** $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$; **e)** $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$.

22. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $4^{x-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$; **b)** $49^{x+2}=7^{x^2-4}$; **c)** $10^{x^2-4x}=\frac{1}{1000}$; **d)** $9^x-3^{x+1}+\frac{8}{9}=0$;

e) $2^x+2^{x+1}+2^{x-1}=56$; **f)** $3\cdot4^x-6^x=2\cdot9^x$; **g)** $4^x+4^{1-x}=4$; **h)** $3^{x+1}-3^x=2^{x+2}-2^{x+1}$.

23. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$; **b)** $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$; **c)** $\log_3\left(\log_4\left(x^2-17\right)\right)=1$;

d) $\log_2\left(2x^2+x+1\right)-\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$; **e)** $\lg\left(x^2+x-2\right)=1+\lg\frac{x-1}{2}$.

FIȘĂ DE RECAPITULARE PROBLEME DE NUMĂRARE ȘI PROBABILITĂȚI

Înainte de a rezolva exercițiile din fișă, recapitulați elementele de teorie necesare:
- metode de numărare,
- elemente de combinatorică – permutări, aranjamente, combinări, binomul lui Newton,
- probabilități.

Exerciții propuse

1. Calculați:

a) $C_{10}^0 - C_{10}^2 + C_{10}^4 - C_{10}^6 + C_{10}^8$;

b) $\dfrac{3A_4^2 + 2P_3}{5P_5 - P_3}$;

c) $\dfrac{C_5^2 + C_6^2}{C_7^2}$;

d) $\dfrac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$;

e) $\dfrac{A_8^5 - P_6}{A_6^3}$;

f) $\dfrac{C_6^2 \cdot C_7^3}{C_7^4 \cdot C_6^4}$.

2. Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ pentru care $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.

3. Rezolvați: **a)** $8C_{x+2}^5 = 3A_{x+2}^3$; **b)** $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; **c)** $A_x^2 + 2A_{x+1}^2 = 30$; **d)** $5A_{x+3}^2 - 4A_{x+2}^2 = 70$;

e) $C_{18}^n = C_{18}^{n+2}$; **f)** $A_{x-3}^2 - 12 = 2C_{x-4}^2$; **g)** $A_{x-1}^2 + A_x^2 \leq 18$; **h)** $5C_{x-1}^3 \leq C_{x+1}^4$; **i)** $C_{10}^n \geq 2C_{10}^{n+1}$.

4. Calculați:

a) Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu ajutorul cifrelor 2,4,6 și 8.

b) Câte numere de patru cifre se pot forma cu ajutorul cifrelor 0,2,4,6,8.

c) Câte numere de trei, respectiv patru cifre distincte există.

d) Câte echipe de 5 persoane se pot forma dintr-un grup de 10 elevi, dintre care jumătate sunt fete, astfel încât fiecare echipă să contină cel puțin trei baieți.

e) Câte funcții bijective se pot defini pe mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$.

f) Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu ajutorul cifrelor 0,2,4,6.

g) Câte numere de patru cifre se pot forma cu ajutorul cifrelor 1,3,5,7,9.

h) Câte echipe de 5 persoane se pot forma dintr-un grup de 8 elevi, dintre care un sfert sunt fete, astfel încât fiecare echipă să contină cel mult două fete.

i) Câte numere de cinci cifre distincte, scrise în baza 10, se pot forma cu cifrele 0,1,…,9.

j) Câte funcții $f:\{1,2,3,4,5,6\} \to \{3,5,7\}$ injective există.

k) Numărul de permutări ale mulţimii $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{12}{x+2} \in \mathbb{N} \right\}$.

5. Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ care conțin cel puțin un număr par.

6. **a)** Calculați probabilitatea ca, alegând un termen al dezvoltării $\left(1+\sqrt[5]{3}\right)^{50}$, acesta să fie rațional.

b) Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele impare.

c) Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Alegem la întâmplare o submulțime a mulțimii A. Calculați probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă trei elemente.

d) Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.

7. Determinați rangul termenului care conține x^2 în dezvoltarea $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}, x\in(0,+\infty)$.

8. Se consideră dezvoltarea $\left(2^x+2^{-x}\right)^n$, unde $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$.

a) Determinați numărul natural n, știind că suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang doi și trei este egală cu 36.

b) Pentru $n=8$, determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât termenul al patrulea al dezvoltării date să fie egal cu 224.

c) Pentru $x=0$, calculați probabilitatea ca, alegând n număr natural de o cifră, $\left(2^x+2^{-x}\right)^n$ să fie număr natural de două cifre.

FIȘĂ DE RECAPITULARE VECTORI ÎN REPER CARTEZIAN; ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

Înainte de a rezolva exercițiile din fișă, recapitulați elementele de teorie necesare:

- formule și reguli de calcul pentru vectori în reper cartezian – exprimarea unui vectori în funcție de versori, coordonatele unui vector când se cunosc originea și vârful, egalitatea a doi vectori, operații cu vectori, modulul unui vector, condiția de paralelism a doi vectori, produs scalar de vectori, condiții de perpendicularitate,

- elemente de geometrie analitică – mijlocul unui segment, distanța dintre două puncte în plan, coorodnatele centrului de greutate al unui triunghi, forma ale ecuației unei drepte, condiții de paralelism și perpendicularitate a două drepte, condiția de coliniaritate a trei puncte, aria unui triunghi.

Exerciții propuse

1. Se consideră în reperul cartezian xOy punctele $A(2;0)$, $B(1;1)$ și $C(3; -2)$.

a) Exprimați în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ vectorii $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{CB}$.

b) Determinați coordonatele vectorului $-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{AC}$.

c) Calculați perimetrul triunghiului ABC.

d) Calculați lungimea medianei duse din C.

e) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\overrightarrow{AC}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+(a-5)\vec{j}$.

f) Determinați coordonatele punctului D astfel încât $ABCD$ este paralelogram.

2. Se consideră într-un reper cartezian xOy punctele $A(-2;9)$, $B(7;-4)$ și $C(8; -3)$.

a) Exprimați în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CA}$.

b) Determinați coordonatele vectorului $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CA}$.

c) Calculați aria triunghiului ABC.

d) Calculați lungimea medianei duse din B.

e) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\overrightarrow{AB}$ să fie perpendicular pe vectorul $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$.

3. Se consideră, într-un reper cartezian xOy, punctele $A(0,-2)$, $B(6,6)$ și $C(-8,4)$.

a) Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului AB, iar O este originea reperului cartezian.

b) Determinați coordonatele punctului T situat pe axa Oy cu proprietatea că vectorii $\overrightarrow{AT}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt perpendiculari.

c) Determinați punctul P situat pe axa Ox cu proprietatea că vectorii $\overrightarrow{AP}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

4. Se consideră într-un reper cartezian xOy triunghiul ABC, cu $A(-1;0)$, $B(0;2)$ și $C(2;-1)$. Exprimați în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ vectorii $\overrightarrow{OG}$ și $\overrightarrow{AG}$ și calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{AG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5. Se consideră într-un reper cartezian xOy punctele $A(-2; 1)$, $B(0;3)$ și $C(4; -1)$.

a) Calculați lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul lui BC.

b) Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu axa Oy.

c) Scrieți ecuația dreptei orizontale care trece prin punctul C.

d) Scrieți ecuația dreptei AC.

e) Scrieți ecuația înălțimii duse din B a triunghiului ABC.

f) Calculați distanța de la punctul B la dreapta AC.

g) Calculați aria triunghiului *ABC*.

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3;1)$, $B(-2;2)$ și $C(0;-3)$.

a) Calculați perimetrul triunghiului *ABC*;
b) Scrieți ecuația medianei duse din *C*;
c) Calculați lungimea medianei duse din *C*;
d) Scrieți ecuația înălțimii duse din *C*;
e) Calculați distanța de la punctul *C* la dreapta *AB*;
f) Calculați aria triunghiului *ABC*;
g) Scrieți ecuația dreptei care trece prin *G*, centrul de greutate al triunghiului *ABC*, și este paralelă cu dreapta *AB*;
h) Determinați coordonatele punctului *D* astfel încât patrulaterul *ABCD* să fie paralelogram;
i) Determinați punctele *M* situate pe axa *Ox* cu proprietatea ca $MA=MB$.

7. Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul $P(4;-1)$ și este paralelă cu dreapta $x-2y+1=0$.

8. Se consideră punctele $A(2;3)$ și $B(-3;-2)$. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului *AB*.

9. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(3;2)$ și este perpendiculară dreapta d: $x+2y+5=0$.

10. Calculați distanța de la punctul $A(2;3)$ la mijlocul segmentului *BC*, unde $B(-1;0)$ și $C(5;2)$.

11. În sistemul cartezian de coordonate xOy, se consideră punctele $A(-1;1)$, $B(1;3)$ și $C(3;2)$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin centrul de greutate al triunghiului *ABC* și este perpendiculară pe dreapta *BC*.

FIȘĂ DE RECAPITULARE ALGEBRĂ

Calcul matriceal: operații cu matrice, determinanți, inversa unei matrice

Înainte de a rezolva exercițiile din fișă, recapitulați elementele de teorie necesare:
- Adunarea, înmulțirea cu scalari și înmulțirea matricelor, cât și proprietățile acestora;
- Ridicarea unei matrice pătratice la o putere cu exponent număr natural;
- Calculul și proprietățile determinanților;
- Aplicații ale determinanților în geometrie;
- Inversa unei matrice pătratice.

Exerciții propuse

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(2))=1$.

b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A(m^2+m+17)$.

d) Determinați matricea $S=\sum_{k=1}^{n} B^k$, unde $B=A(3)$.

2. Se dau matricele: $X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Z=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $A=X-Y\cdot Z$.

a) Calculați determinantul matricei X.

b) Arătați că $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculați inversa matricei A.

d) Determinați $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

3. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2-x \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-x & 0 & x \end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=2A(xy-x-y+2)$, pentru $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

b) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

c) Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)\cdot A(q)=4\cdot I_3$.

4. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $A(2)-5\cdot {}^t(A(3))$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$, pentru $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(7)$.

d) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A(x))\le 0$.

e) Arătați că numărul $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(10))$ este natural, divizibil cu 100.

f) Determinați perechile de numerele reale x și y pentru care $\det(y\cdot A(x))=2020y^3$.

5. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a \\ 0 & 2\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $A(1)+A(3)=2A(2)$.

b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-2), \forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numărul real x, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(10)=A(x^2+x+17)$.

d) Arătați că suma elementelor matricei $B=A(2)+A(2^2)+A(2^3)+\ldots+A(2^{100})$ este un număr naturl impar.

6. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ 2 & -4\end{pmatrix}$ şi mulţimea matricelor $G=\left\{X(a)=I_2+aA \,\middle|\, a\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}\right\}$.

a) Demonstraţi că $A^2=-5A$ şi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-5ab)$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $X^2=I_2$, unde $X\in G$.

c) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care $X(1)\cdot X(x)=X(3)$.

7. Se dau matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculați $A+B$, $2A-B$, ${}^tA+{}^tB$.

b) Calculați $A\cdot B$.

c) Rezolvați ecuația $2(B-A)+X=A^2, X\in M_3(\mathbb{R})$.

8. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se considera matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+4x & 0 & 8x \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)$.

b) Rezolvați ecuația $(A(x))^3=A(0)$.

c) Determinați inversa matricei $A(1)$.

9. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2-3\cdot A=O_2$;

b) Demonstrați că $A^n=3^{n-1}A, \forall n\geq 1$;

c) Calculați $\det(B)$, unde $B=I_2+A+A^2+...+A^n, n\geq 1$.

10. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{C}$.

a) Calculați $\det(A(i))$, unde $i^2=-1$;

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A((x+1)\cdot(y+1)-1), \forall x,y\in\mathbb{C}$;

c) Determinați $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $A^4(n)=A(0)$.

11. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 3x\\ -3x & 1-3x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Calculați $A(1)-2\cdot A(-3)$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $A(\sqrt{x})\cdot A(\sqrt{x+5})=A(5)$.

12. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2^x & 2^x\\ -2^x & 1-2^x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$. Dacă pentru două numere naturale m și n are loc relația $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$, atunci $m=n=1$.

13. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ y & y^2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

a) Demonstrați că $D(x,y)=(x-y)\cdot(3x+3y-xy-2)$, pentru orice numere reale x și y.

b) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,a^2), B(-2,4)$, $C(3,2)$, unde a este un număr real. Demonstrați că punctele A, B și C **nu** sunt coliniare pentru orice $a\in\mathbb{R}-\left\{-2,\frac{8}{5}\right\}$

14. Se consideră determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x+1 & y+1 & 2\\ x^2+x & y^2+y & 2\end{vmatrix}, x,y\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $\Delta(1,-1)$.

b) Arătați că $\Delta(x,y)=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru oricee numere reale x și y.

c) Arătați că $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2 pentru orice numere întregi m și n.

15. Calculați determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & -1\\ -1 & x_1 & x_2\\ x_2 & -1 & x_1\end{vmatrix}$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-x+7=0$.

16. Rezolvaţi ecuaţia: $\begin{vmatrix} x-3 & 4 & 2 \\ 3 & x-2 & 0 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$.

17. Se dau punctele $A(1,1), B(4,-3), C(3,0)$.

a) Calculați distanța de la C la dreapta AB.

b) Calculaţi aria triunghiului ABC.

c) Determinați coordonatele punctului D știind că $D \in d$ de ecuație: $d: 2x + y - 5 = 0$ și că aria triunghiului ABD este egală cu aria triunghiului ACD.

18. Se dau punctele $A(-2,3), B(1,-4), C(2a-1,10)$ şi $D(1,-3)$.

a) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ punctele A, B, C sunt coliniare?

b) Calculaţi aria triunghiului ABD.

c) Dacă punctul $M(m^2-3, m), m \in \mathbb{Z}$, este situat la distanţa $\sqrt{5}$ faţă de dreapta AD, determinaţi coordonatele punctului M.

19. Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & 2 \\ x^2+x & y^2+y & 2 \end{vmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $\Delta(0,2)$.

b) Arătaţi că $\Delta(x,y) = (x-1)(y-1)(y-x)$, pentru oricee numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\Delta(\ln x, \ln^2 x^2) = 0$.

20. Se consideră determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & 2 \\ x^2+1 & y^2+1 & 5 \end{vmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $\Delta(1,-1)$.

b) Arătaţi că $\Delta(x,y) = (x-2)(y-2)(y-x)$, pentru oricee numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\Delta(2^x, 4^x) = 0$.

FIȘĂ DE RECAPITULARE ANALIZĂ MATEMATICĂ

calculul derivatelor, ecuația tangentei la graficul unei funcții într-un punct situat pe graficul acesteia, rolul derivatei de ordinul I în studiul variației funcțiilor

Înainte de a rezolva exercițiile din fișă, recapitulați elementele de teorie necesare:
- formulele de derivare a funcțiilor elementare,
- operații cu funcții derivabile,
- ecuația tangentei la graficul unei funcții într-un punct situat pe graficul acesteia,
- determinarea intervalelor de monotonie și a punctelor de extrem local cu ajutorul derivatei de ordinul I.

Exerciții propuse

1. Calculați derivatele următoarelor funcții:

a) $f(x)=5x^3-x^2+7x$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$;

d) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$, $x\in(0;\pi)$;

e) $f(x)=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in(1;+\infty)$;

f) $f(x)=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}x^2+3x^3-x^4$, $x\in\mathbb{R}$;

g) $f(x)=x\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{x}+2x^{-3}$, $x\in(0,+\infty)$;

h) $f(x)=\ln x-2\log_2 x+5\lg x$, $x\in(0,+\infty)$;

i) $f(x)=5^x-e^x+2\sin x-\cos x$, $x\in\mathbb{R}$;

j) $f(x)=(3\sin x-\cos x)(2\sin x-5\cos x)$, $x\in\mathbb{R}$

k) $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\ln x+x}$, $x\in(0,+\infty)$;

l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$;

m) $f(x)=\cos^2 x+\cos 2x$, $x\in\mathbb{R}$;

n) $f(x)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$, $x\in(0,+\infty)$;

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-(x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$, $\forall x\in(1,+\infty)$;

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$ situat pe graficul funcției;

c) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe domeniul de definiție.

3. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-3)-2\ln(x^2-9)$.

a) Arătați că $f'(x)=-\dfrac{3(x-1)}{x^2-9}$, $\forall x\in(3,+\infty)$;

b) Arătați că **nu** există niciun punct situat pe graficul funcției f , în care tangenta la grafic să fie paralelă cu axa Ox;

c) Arătați că funcția f este injectivă.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

a) Arătați că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x)=0$;

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f;

d) Arătați că funcția admite un punct de extrem local.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4x^2-1$.

a) Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta este perpendiculară pe dreapta de ecuație $3x-y+1=0$;

b) Arătați că funcția f are două puncte de extrem local.

6. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$;

b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției f;

c) Arătați că $f\left(\sqrt{2}\right)\geq f\left(\sqrt{3}\right)$;

d) Determinați imaginea funcției f.

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}\left(x^2+2x+1\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=2e^{2x}\left(x^2+3x+2\right)$, pentru $x\in\mathbb{R}$;

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul său;

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f;

d) Determinați imaginea funcției f.

8. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f;

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f;

d) Arătați că $f(x)\geq 4$, $\forall x\in(1,+\infty)$.

9. Fie $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^3\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=x^2(3\ln x+1)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$;

b) Determinați imaginea funcției f;

c) Demonstrați că $1+3ex^3\ln x\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

10. Fie $f:(-2;2)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe domeniul de definiție;

b) Arătați că funcția f este bijectivă;

c) Arătați că $f(x)\leq\ln 3,(\forall)x\in(-2;1]$.

11. Demonstrați următoarele inegalități:

a) $\sin x\leq x,\forall x\in[0,+\infty)$; **b)** $e^x\geq x^e,\forall x\in[0;\infty)$.