Simulare - Examenul de bacalaureat național 2025

22 ianuarie 2025

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_4 = -3$ și $a_6 = 1$. Determinați termenul a_2.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(1) = f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{1+3x} + x = 1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A = \{1,2,3,4,5\}$, aceasta să fie o submulțime cu două elemente.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Un triunghi ABC are laturile $AB = 6, BC = 10$ și lungimea razei cercului circumscris este $R = 5$. Determinați sinusul unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,m) = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$, unde $x, m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei $A(1,2)$.

5p **b)** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2(x,1) = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 18 \\ 6 & 16 & 9 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați valorile parametrului real m pentru care matricea $A(x,m)$ este inversabilă, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y = 1 + \log_2 x + \log_2 y$.

5p **a)** Arătați că $2^m \circ 2^n = 1 + m + n, (\forall)\, m, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **b)** Comparați numerele $a = (2^2\circ 2^3)\circ 2^4$ și $b = 2^2\circ(2^3\circ 2^4)$.

5p **c)** Arătați că numărul $S = (2^1\circ 2^2) + (2^3\circ 2^4) + (2^5\circ 2^6) + \ldots + (2^{2025}\circ 2^{2026})$ se divide cu 26^2.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{2x(x+2)}{x+1}, x\in(-1,\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real $a\in(-1,\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 2025$.

5p **c)** Demonstrați că $(x+1)^2 \geq 2\ln(x+1) + 1$, pentru orice $x\in(-1,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \dfrac{1}{x(\ln x+3)\,f(\ln x)}\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x (x+3)^n (f(x))^n\,dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural $n, n\geq 1$.